Licence 2 MIASHS

Contrôle Continu du lundi 4 mars 2019 – Durée 1h15

Documents et calculatrice interdits

Ecrire les réponses et calculs sur cette copie, en respectant les délimitations

---

NOM :

PRENOM :

EXERCICE 1 – Pour quelle valeur de C les fonctions ci-dessous sont-elles des densités sur $\mathbb{R}$?

---

1. $f_1(x) = \mathrm{C}x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

Réponse. On calcule l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x = \mathrm{C}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \mathrm{C}[\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

L'intégrale vaut 1 si $\frac{\mathrm{C}}{2} = 1$, i.e. $\mathrm{C} = 2$, auquel cas f_1 est positive. Donc f_1 est une densité si $\mathrm{C} = 2$.

---

2. $f_2(x) = x^2\mathbf{1}_{[0,\mathrm{C}]}(x)$

Réponse. De même,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{C}} x^2\mathrm{d}x = [\frac{x^3}{3}]_0^{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{C}^3}{3}.$$

L'intégrale vaut 1 si $\frac{\mathrm{C}^3}{3} = 1$, soit $\mathrm{C} = 3^{1/3}$, auquel cas f_2 est positive. Donc f_2 est une densité si $\mathrm{C} = 3^{1/3}$.

---

3. $f_3(x) = \frac{\mathrm{C}}{x^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$

Réponse. On calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\mathrm{d}x = \mathrm{C}\int_1^{+\infty} x^{-3}\mathrm{d}x = \mathrm{C}[\frac{x^{-2}}{-2}]_1^{+\infty} = \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

L'intégrale vaut 1 si $\frac{\mathrm{C}}{2} = 1$, i.e. $\mathrm{C} = 2$, auquel cas f_3 est positive. Donc f_3 est une densité si $\mathrm{C} = 2$.

EXERCICE 2 – Pour chaque variable aléatoire réelle ci-dessous, calculer sa fonction de répartition et son premier quartile.

---

1. La variable aléatoire réelle X_1 qui possède pour densité $g_1(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Réponse. Notons G_1 la f.r. de X_1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_1(x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \leq x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^{-|t|}\mathrm{d}t$. Si $x \leq 0$,

$$\mathrm{G}_1(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x e^t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[e^t]_{-\infty}^x = \frac{1}{2}e^x,$$

et lorsque $x > 0$, avec la relation de Chasles :

$$\mathrm{G}_1(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-e^{-t}]_0^x = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Le 1er quartile Q est tel que $G_1(Q) = \frac{1}{4}$. Comme $G_1(x) \leq \frac{1}{2}$ si $x \leq 0$, Q est négatif et il faut donc considérer la fonction G_1 sur $\mathbb{R}_-$. Alors, Q vérifie la relation $\frac{1}{2}e^Q = \frac{1}{4}$, soit $e^Q = \frac{1}{2}$ et donc $Q = -\log 2$.

---

2. La variable aléatoire réelle X_2 qui possède pour densité $g_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

Réponse. Soit G_2 la fonction de répartition de X_2. Comme $\mathbb{P}(X_2 \in [0,1]) = 1$, on a $G_2(x) = 0$ si $x < 0$ et $G_2(x) = 1$ si $x > 1$. Puis, pour $x \in [0,1]$:

$$G_2(x) = \int_{-\infty}^{x} g_2(t)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}[\frac{2}{3}t^{3/2}]_0^x = x^{3/2}.$$

Le 1er quartile Q est tel que $G_2(Q) = \frac{1}{4}$. Cela donne $Q^{3/2} = \frac{1}{4}$, soit $Q = \frac{1}{4^{2/3}}$.

EXERCICE 3 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $h(x) = 2xe^{-x^2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Calculer la densité de la variable aléatoire réelle $\varphi(X)$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

---

1. $\varphi(x) = 2x + 1$.

Réponse. On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et la fonction φ est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après le cours, la densité de $\varphi(X)$ est donc

$$\frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(x))|}\,h(\varphi^{-1}(x)).$$

Or, $\varphi'(x) = 2$, $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, $\varphi(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$, et ainsi la densité de $\varphi(X)$ vaut

$$\frac{1}{2}2\frac{x-1}{2}e^{-(x-1)^2/4}\mathbf{1}_{\varphi(\mathbb{R}_+)}(x) = \frac{x-1}{2}e^{-(x-1)^2/4}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x).$$

---

2. $\varphi(x) = x^2$.

Réponse. On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et la fonction φ est strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc utiliser la formule générale de la question précédente. Ici, $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$, $\varphi(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, ce qui nous donne la densité

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}2\sqrt{x}e^{-x}\mathbf{1}_{\varphi(\mathbb{R}_+)}(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x),$$

et on peut remarquer au passage que $X^2 \sim \mathscr{E}(1)$.

EXERCICE 4 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

---

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{E}(X^k)$.

Réponse. On peut remarquer au préalable que X^k est intégrable car X est bornée. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 x^{k+1/2}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[\frac{x^{k+3/2}}{k+3/2}]_0^1 = \frac{3}{2k+3}.$$

---

2. Calculer $\mathbb{E}(\frac{1}{\sqrt{X}})$.

Réponse. La v.a.r. $1/\sqrt{X}$ étant positive, la preuve de son intégrabilité et le calcul de son espérance sont identiques, on se permet donc de passer directement au calcul d'espérance. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(\frac{1}{\sqrt{X}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

---

3. Calculer $\mathbb{E}(e^X)$.

Réponse. On peut remarquer au préalable que e^X est intégrable car bornée. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^1 \sqrt{x}e^x\mathrm{d}x$$

Faisons le changement de variable $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, dans cette intégrale. On a $x = y^2$ et $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$, d'où

$$\mathbb{E}(e^X) = \frac{3}{2}\int_0^1 ye^{y^2}2y\mathrm{d}y = 3\int_0^1 y^2e^{y^2}\mathrm{d}y.$$

On effectue maintenant une intégration par parties, avec $u(y) = y$ et $v'(y) = ye^{y^2}$. Comme $u'(y) = 1$ et $v(y) = \frac{1}{2}e^{y^2} + cte$, cela donne

$$\mathbb{E}(e^X) = 3[y\frac{1}{2}e^{y^2}]_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y = \frac{3}{2}e - \frac{3}{2}\int_0^1 e^{y^2}\mathrm{d}y.$$

On ne peut pas aller plus loin dans le calcul de l'intégrale car il n'existe pas de primitive de la fonction de Gauss $y \mapsto e^{y^2}$ s'exprimant avec des fonctions usuelles.
