Licence 2 MIASHS – Probabilités III

Contrôle Continu du jeudi 25 avril 2019 – Durée 1h30

Documents et calculatrice interdits

Ecrire les réponses et calculs sur cette copie, en respectant les délimitations

---

NOM :

PRENOM :

EXERCICE 1 – Trouver C pour que les fonctions ci-dessous soient des densités sur $\mathbb{R}^2$.

Note : *il suffit donc de trouver* C *de sorte que la fonction soit positive et d'intégrale 1 sur* $\mathbb{R}^2$.

1. $f_1(x,y) = \mathrm{C}(x+y)\mathbf{1}_{[-1,0]^2}(x,y)$.

Réponse. Calculons l'intégrale de f_1 sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \mathrm{C}\int_{-1}^{0}(\int_{-1}^{0}(x+y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \mathrm{C}\int_{-1}^{0}[\frac{x^2}{2}+xy]_{-1}^{0}\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{C}\int_{-1}^{0}(y-\frac{1}{2})\mathrm{d}y = [\frac{y^2}{2}-\frac{y}{2}]_{-1}^{0} = -1.\end{aligned}$$

Pour que l'intégrale soit égale à 1, il faut donc que $\mathrm{C} = -1$, auquel cas f_1 est bien positive.

---

2. $f_2(x,y) = (\mathrm{C}y^2 + x)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.

Réponse. Calculons l'intégrale de f_2 sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{0}^{1}(\int_{0}^{1}(\mathrm{C}y^2+x)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \int_{0}^{1}[\mathrm{C}y^2x+\frac{x^2}{2}]_{0}^{1}\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1}(\mathrm{C}y^2+\frac{1}{2})\mathrm{d}y = [\mathrm{C}\frac{y^3}{3}+\frac{y}{2}]_{0}^{1} = \frac{\mathrm{C}}{3}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pour que l'intégrale soit égale à 1, il faut donc que $\mathrm{C} = 3/2$, auquel cas f_2 est bien positive.

EXERCICE 2 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x,y) = \frac{4}{5}(xy+1)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y).$$

1. Justifier sans calculs que $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$ (on ne demande pas ici de calculer les lois), et que X et Y ne sont pas indépendantes.

Réponse. La densité est symétrique, i.e. $f(x,y) = f(y,x)$, donc $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$. De plus, on ne peut pas écrire la densité f sous la forme $f(x,y) = h(x)g(y)$ pour 2 fonctions h, g sur $\mathbb{R}$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

---

2. Calculer la densité marginale de X.

Réponse. D'après le cours, la densité f_{X} de X vaut

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{X}}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\int_{0}^{1}(xy+1)\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{5}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)[x\frac{y^2}{2}+y]_{0}^{1} = \frac{4}{5}(\frac{x}{2}+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x).\end{aligned}$$

Note : comme $X \sim Y$, la densité de Y est donc aussi $\frac{4}{5}(\frac{x}{2}+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

---

2. Déterminer les variances de X et de Y.

Note : comme X et Y v.a.r. bornées car $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$ et idem pour Y, X^2 et Y^2 sont intégrables et donc leur variance existe.

Réponse. Tout d'abord, comme $X \sim Y$, on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y)$. Calculons tout d'abord la moyenne de X. D'après le cours,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_0^1 (\frac{x^2}{2}+x)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

De plus, son moment d'ordre 2 vaut

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_0^1 (\frac{x^3}{2}+x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{5}[\frac{x^4}{8}+\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{11}{30}.$$

D'où

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{11}{30} - (\frac{8}{15})^2 = \frac{37}{450}.$$

---

3. Calculer la covariance entre X et Y.

Note : comme X et Y sont bornées, X^2 et Y^2 sont intégrables, donc leur covariance existe.

Réponse. Calculons tout d'abord, avec le théorème de transfert puis le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\mathrm{d}\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\int_0^1 (\int_0^1 (x^2y^2+xy)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y = \frac{4}{5}\int_0^1 [y^2\frac{x^3}{3}+y\frac{x^2}{2}]_0^1\mathrm{d}y \\ &= \frac{4}{5}\int_0^1 (\frac{y^2}{3}+\frac{y}{2})\mathrm{d}y = \frac{4}{5}[\frac{y^3}{9}+\frac{y^2}{4}]_0^1 = \frac{13}{45}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{13}{45} - (\frac{8}{15})^2 = \frac{1}{225}.$$

EXERCICE 3 – Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathscr{E}(1)$, i.e. de densité

$$f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

---

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ? (justifier la réponse).

Réponse. D'après le cours, si 2 v.a.r. X et Y de densités respectives f_X et f_Y sont indépendantes, alors la densité du couple (X, Y) vaut $f_X(x)f_Y(y)$. Ici, $f_X = f_Y = f$, donc par indépendance de X et Y, la densité du couple (X, Y) vaut $f(x)f(y) = e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$.

---

2. Calculer la densité de la variable aléatoire réelle X^2.

Réponse. On peut utiliser, par exemple, la méthode de la f.r. Calculons donc tout d'abord la f.r. F de X^2, définie par $F(x) = \mathbb{P}(X^2 \le x)$. Si $x \le 0$, $F(x) = 0$ car $\mathbb{P}(X^2 > 0) = 1$ et, pour $x > 0$,

$$F(x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t}\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\sqrt{x}}.$$

La dérivée F' de F vaut $F'(x) = 0$ pour $x \le 0$ et, pour $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}.$$

Ainsi, $F'(x) \geq 0$ et, avec le changement de variable $t = \sqrt{x}$, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}} F'(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t} e^{-t} 2t\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1.$$

Par suite, F' est bien une densité sur $\mathbb{R}$ et, d'après le cours, c'est donc la densité de X^2.

---

3. Déterminer la densité de la variable aléatoire réelle $X+Y$.

Réponse. Comme X et Y sont indépendantes, on sait avec le cours que la densité de $X+Y$, notée g, est définie par la formule

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-x+t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathrm{d}t = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \end{aligned}$$

car le domaine défini par $\{(x,t) : t \geq 0 \text{ et } x-t \geq 0\} = \{(x,t) : x \geq 0 \text{ et } 0 \leq t \leq x\}$.

EXERCICE 4 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

---

1. Calculer la densité du couple de variables aléatoires réelles $(X, 2X+Y)$.

Réponse. Soit $\varphi(x,y) = (x, 2x+y)$: φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculons sa fonction réciproque : $\varphi(x,y) = (x,2x+y) = (s,t)$ entraîne $x = s$ et $y = t-2x = t-2s$, d'où $\varphi^{-1}(s,t) = (s, t-2s)$. De plus, le déterminant jacobien de φ^{-1} vaut $J_{\varphi^{-1}}(s,t) = 1$. D'après le cours, le couple $(X, 2X+Y) = \varphi(X,Y)$ admet donc pour densité la fonction

$$f(\varphi^{-1}(s,t))|J_{\varphi^{-1}}(s,t)| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(s^2+(t-2s)^2)}.$$

---

2. En déduire la densité de la variable aléatoire $2X+Y$

Réponse. D'après le cours, la densité marginale g de la v.a.r. $2X+Y$ vaut

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(s^2+(t-2s)^2)}\mathrm{d}s.$$

Pour calculer cette intégrale, il faut transformer la forme quadratique $s^2+(t-2s)^2$ de la manière suivante :

$$s^2+(t-2s)^2 = t^2+5s^2-4st = t^2+(\sqrt{5}s - \frac{2}{\sqrt{5}}t)^2 - \frac{4}{5}t^2 = \frac{t^2}{5} + (\sqrt{5}s - \frac{2}{\sqrt{5}}t)^2.$$

Alors, avec le changement de variable $z = \sqrt{5}s - 2t/\sqrt{5}$ à t fixé, on trouve, comme $\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}$,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{10}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{t^2}{10}}.$$

On peut remarquer au passage que cette densité est la densité de la loi $\mathscr{N}(0,5)$, c'est-à-dire que $2X+Y \sim \mathscr{N}(0,5)$.
