Licence 2 MIASHS - Probabilités 3

Corrigé du contrôle continu du lundi 17 février 2020

Documents et calculatrice interdits

Ecrire les réponses et calculs sur cette copie, en respectant les délimitations

---

NOM :

PRENOM :

EXERCICE 1 – Pour quelle valeur de C les fonctions ci-dessous sont-elles des densités sur $\mathbb{R}$?

---

1. $f_1(x) = C(x+1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = C\int_0^1 (x+1)dx = C[\frac{x^2}{2}+x]_0^1 = C\frac{3}{2}$. *Donc* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1$ *si* $C = \frac{2}{3}$, *auquel cas* $f_1(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Ainsi, pour* $C = \frac{2}{3}$, f_1 *est une densité.*

---

2. $f_2(x) = (x+1)\mathbf{1}_{[0,C]}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = \int_0^C (x+1)dx = C[\frac{x^2}{2}+x]_0^C = \frac{C^2}{2}+C$. *Donc* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)dx = 1$ *si* $C^2+2C-2=0$, *ce qui donne* $C = -1 \pm \sqrt{3}$. *Mais* $C = -1+\sqrt{3}$ *est la seule solution pour laquelle* $f_2(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Ainsi, pour* $C = -1+\sqrt{3}$, *et seulement pour ce nombre,* f_2 *est une densité.*

---

3. $f_3(x) = Cxe^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)dx = C\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. *Calculons la dernière intégrale avec une intégration par partie :*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1.$$

Par suite, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)dx = 1$ *si* $C = 1$, *auquel cas* $f_3(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Ainsi, pour* $C = 1$, f_3 *est une densité.*

EXERCICE 2 – Pour chaque variable aléatoire réelle ci-dessous, calculer sa fonction de répartition et sa médiane.

---

1. La variable aléatoire réelle X_1 qui possède pour densité $g_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathbf{1}_{]0,1]}(x)$.

On a $F_1(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{-\infty}^x g_1(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{1}_{]0,1]}(t)dt$. *Par suite,* $F_1(x) = 0$ *si* $x < 0$, $F_1(x) = 1$ *si* $x > 1$ *et, pour* $x \in [0,1]$, $F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = [\sqrt{t}]_0^x = \sqrt{x}$. *La médiane* m_1 *vérifie* $F_1(m_1) = \frac{1}{2}$, *donc* $m_1 \in [0,1]$. *Par suite,* $\sqrt{m_1} = \frac{1}{2}$, *soit* $m_1 = \frac{1}{4}$.

---

2. La variable aléatoire réelle X_2 qui possède pour densité $g_2(x) = \frac{2}{x}\ln(x)\mathbf{1}_{[1,e]}(x)$.

On a $F_2(x) = \mathbb{P}(X_2 \leq x) = \int_{-\infty}^x g_2(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{2}{t}\ln(t)\mathbf{1}_{[1,e]}(t)dt$. *Par suite,* $F_2(x) = 0$ *si* $x < 1$, $F_2(x) = 1$ *si* $x > e$ *et, pour* $x \in [1,e]$, $F_2(x) = \int_1^x \frac{2}{t}\ln(t)dt = [(\ln(t))^2]_1^x = (\ln(x))^2$. *La médiane* m_2 *vérifie* $F_2(m_2) = \frac{1}{2}$, *donc* $m_2 \in [1,e]$. *Par suite,* $(\ln(m_2))^2 = \frac{1}{2}$, *soit* $\ln(m_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $m_2 = e^{1/\sqrt{2}}$.

---

3. La variable aléatoire réelle X_3 qui possède pour densité $g_3(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

On a $F_3(x) = \mathbb{P}(X_3 \leq x) = \int_{-\infty}^x g_3(x)dx = \int_{-\infty}^x \frac{3}{4}(1-t^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(t)dt$. *Par suite,* $F_3(x) = 0$ *si* $x < -1$, $F_2(x) = 1$ *si* $x > 1$ *et, pour* $x \in [-1,1]$, $F_3(x) = \int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{3}{4}[t-\frac{t^3}{3}]_{-1}^x = \frac{3}{4}(x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3})$. *La* *médiane m_3 vérifie $F_3(m_3) = \frac{1}{2}$, donc $m_3 \in [-1,1]$. Par suite, on a $\frac{3}{4}(m_3 - \frac{m_3^3}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$, ce qui revient à $m_3 - \frac{m_3^3}{3} = m_3(1 - \frac{m_3^2}{3}) = 0$. Les réels $0, -\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ sont solutions de cette équation, mais seul 0 est dans l'intervalle $[-1,1]$. Par suite, $m_3 = 0$ (noter qu'on pouvait montrer cela plus simplement, en observant que g_3 est paire).*

EXERCICE 3 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $h(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Calculer la densité de la variable aléatoire réelle $\varphi(X)$, où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par :

---

1. $\varphi(x) = 2x + 1$.

On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ telle que $\varphi(x) = 2x + 1$ est strictement croissante (en fait bijective) et de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $\varphi'(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$: en effet, l'équation $\varphi(x) = 2x+1 = y$ est équivalente à $x = \frac{y-1}{2}$, d'où la valeur trouvée pour φ^{-1}. D'après le cours, la densité h_1 de la v.a.r. $\varphi(X) = 2X + 1$ est alors

$$h_1(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}h(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{2}2\exp(-2\frac{y-1}{2})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\frac{y-1}{2}) = \exp(1-y)\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y).$$

---

2. $\varphi(x) = x^2$.

On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\varphi(x) = x^2$ est strictement croissante (en fait bijective) et de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $\varphi'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}$: en effet, l'équation $\varphi(x) = x^2 = y$ est équivalente à $x = \sqrt{y}$, d'où la valeur trouvée pour φ^{-1}. D'après le cours, la densité h_2 de la v.a.r. $\varphi(X) = X^2$ est alors

$$h_2(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}h(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{2\sqrt{y}}2\exp(-2\sqrt{y})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\sqrt{y}) = \frac{e^{-2\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

---

3. $\varphi(x) = e^x$.

On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ telle que $\varphi(x) = e^x$ est strictement croissante (en fait bijective) et de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $\varphi'(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi^{-1}(y) = \ln(y)$: en effet, l'équation $\varphi(x) = e^x = y$ est équivalente à $x = \ln(y)$, d'où la valeur trouvée pour φ^{-1}. D'après le cours, la densité h_3 de la v.a.r. $\varphi(X) = e^X$ est alors

$$h_3(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}h(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{e^{\ln(y)}}2\exp(-2\ln(y))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\ln(y)) = \frac{2}{y^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(y).$$

EXERCICE 4 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $h(x) = 3x^2e^{-x^3}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

En utilisant le fait qu'une primitive de la fonction $3x^2e^{-x^3}$ est $-e^{-x^3}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 < X \leq 2) &= \int_0^2 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 3x^2e^{-x^3}\mathrm{d}x = [-e^{-x^3}]_0^2 = 1 - e^{-2^3} = 1 - e^{-8} \\ \textit{et} \quad \mathbb{P}(X \geq 1) &= \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} 3x^2e^{-x^3}\mathrm{d}x = [-e^{-x^3}]_1^{+\infty} = e^{-1}. \end{aligned}$$
