LICENCE 2 MIASHS - PROBABILITES III

Corrigé du contrôle continu du lundi 27 avril 2020 – 16h-17h30

EXERCICE 1 – Trouver C pour que les fonctions ci-dessous soient des densités sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f_1(x,y) = Cxy^2\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.

Calculons l'intégrale de f_1 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)dxdy &= C\int_{[0,1]^2} xy^2 dxdy = C(\int_0^1 xdx)(\int_0^1 y^2 dy) \quad \text{(par Fubini)}\\ &= C[\frac{x^2}{2}]_0^1[\frac{y^3}{3}]_0^1 = \frac{C}{6}.\end{aligned}$$

Par suite, $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)dxdy = 1$ si $C = 6$, auquel cas $f_1(x,y) \geq 0$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$. Ainsi, f_1 est une densité si $C = 6$.

2. $f_2(x,y) = (x^3+y)\mathbf{1}_{[0,1]\times[0,C]}(x,y)$. Calculons l'intégrale de f_2 :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)dxdy &= \int_{[0,1]\times[0,C]} (x^3+y)dxdy = \int_0^C(\int_0^1 (x^3+y)dx)dy \quad \text{(par Fubini)}\\ &= \int_0^C [\frac{x^4}{4}+xy]_0^1 dy = \int_0^C (\frac{1}{4}+y)dy = [\frac{y}{4}+\frac{y^2}{2}]_0^C = \frac{C}{4}+\frac{C^2}{2}.\end{aligned}$$

Par suite, $\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)dxdy = 1$ si $2C^2+C-4=0$, i.e. si $C = \frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}$. Seule la solution $C = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ est telle que $f_2(x,y) \geq 0$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$. Donc f_2 est une densité si $C = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Calculs préliminaires pour les exercices 2 et 3 : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$ **(intégrale de la densité de la loi $\mathcal{E}(1)$),** $I_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$ **(moyenne d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$, cf calcul effectué dans le chapitre 3 du cours),** $I_2 = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2$ **(moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(1)$, obtenu par intégration par parties – calcul effectué en cours et en TD) et** $I_3 = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = 6$ **(obtenu par intégration par parties).**

EXERCICE 2 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f(x) = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Déterminer la moyenne de X^2.

D'après le théorème de transfert (valide car X^2 est intégrable, cf calculs ci-dessous) :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx = I_3 = 6.$$

2. Calculer la variance de X.

D'après le théorème de transfert (valide car X est intégrable, cf calculs ci-dessous) :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = I_2 = 2.$$

Comme, d'après la formule de Koenig, $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$, on trouve $\text{var}(X) = 6-4 = 2$.

3. Calculer la densité de la variable aléatoire réelle $\frac{1}{1+X}$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to]0,1]$ telle que $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$. Alors φ est bijective, strictement décroissante et de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$. Pour calculer la fonction réciproque φ^{-1}, on prend $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in]0,1]$ tels que $y = \varphi(x) = \frac{1}{1+x}$, d'où $1+x = \frac{1}{y}$ et $x = \frac{1}{y} - 1$. Ce calcul donne $\varphi^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1$. Comme $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$, un théorème du chapitre 1 du cours nous donne la densité de $\varphi(X) = \frac{1}{1+X}$, qui est alors :

$$f_{\varphi(X)}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{\frac{1}{(1+\frac{1}{y}-1)^2}} \frac{1-y}{y} e^{-\frac{1-y}{y}} \mathbf{1}_{]0,1]}(y) = \frac{1-y}{y^3} e^{-\frac{1-y}{y}} \mathbf{1}_{]0,1]}(y).$$

EXERCICE 3 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y).$$

1. Justifier sans calculs que $X \sim Y$ (on ne demande pas ici de calculer les lois), et que X et Y ne sont pas indépendantes.

On a $f(x,y) = f(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, donc $X \sim Y$. De plus, $f(x,y)$ ne s'écrit pas sous la forme d'une fonction de x multipliée par une fonction de y, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Calculer la densité marginale de X.

En notant comme d'habitude f_X cette densité, on a

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \frac{e^{-x}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\int_0^{+\infty}(x+y)e^{-y}dy \\
&= \frac{e^{-x}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(x\int_0^{+\infty} e^{-y}dy + \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy) \\
&= \frac{e^{-x}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(xI_0 + I_1) = (x+1)\frac{e^{-x}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).
\end{aligned}$$

3. Déterminer les espérances de X et de Y.

Par le théorème de transfert (valide car X est intégrable, cf calculs ci-dessous) :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x^2+x)e^{-x}dx = \frac{1}{2}(I_2 + I_1) = \frac{1}{2}(2+1) = \frac{3}{2}.$$

De plus, comme $X \sim Y$, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$.

4. Calculer la covariance entre X et Y.

Par le théorème de transfert (valide car XY est intégrable, cf calculs ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^2}(x^2y + xy^2)e^{-x-y}dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy + x\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy)dx \quad \text{(par Fubini)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x}(x^2 I_1 + xI_2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x^2+2x)e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{2}(I_2 + 2I_1) = \frac{1}{2}(2+2) = 2.
\end{aligned}$$

Par suite, $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 2 - (\frac{3}{2})^2 = -\frac{1}{4}$.

EXERCICE 4 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

1. Calculer la densité du couple de variables aléatoires réelles $(2X, 3X + 2Y)$.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x, y) = (2x, 3x + 2y)$. Alors, φ est un difféormorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Pour calculer la fonction réciproque φ^{-1}, on prend $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(u, v) = \varphi(x, y) = (2x, 3x + 2y)$. Alors, $x = \frac{u}{2}$ d'où $y = \frac{1}{2}(v - 3x) = \frac{1}{2}(v - 3u)$ et ainsi

$$\varphi^{-1}(u, v) = (\frac{u}{2}, \frac{1}{2}(v - \frac{3}{2}u)).$$

Le déterminant de la matrice jacobienne de φ^{-1} vaut donc $\det J_{\varphi^{-1}}(u, v) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{-3}{4} \times 0 = \frac{1}{4}$. D'après le cours (chapitre 4), comme $\mathbb{P}((X, Y) \in \mathbb{R}^2) = 1$, la densité du couple $(U, V) = \varphi(X, Y) = (2X, 3X + 2Y)$ vaut donc

$$f_{U,V}(u, v) = f(\varphi^{-1}(u, v))|\det J_{\varphi^{-1}}(u, v)| = \frac{1}{8\pi} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{4} + \frac{1}{4}(v - \frac{3}{2}u)^2)).$$

2. En déduire la densité de la variable aléatoire $3X + 2Y$.

La densité marginale de $V = 3X + 2Y$ vaut

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} f(u, v)du = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{u^2}{4} + \frac{1}{4}(v - \frac{3}{2}u)^2))du.$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{4} + \frac{1}{4}(v - \frac{3}{2}u)^2 &= \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{4} + \frac{9}{16}u^2 - \frac{3}{4}uv = \frac{v^2}{4} + \frac{13}{16}u^2 - \frac{3}{4}uv \\ &= \frac{v^2}{4} + [(\frac{\sqrt{13}}{4}u - \frac{3}{2\sqrt{13}}v)^2 - \frac{9}{52}v^2] = \frac{1}{13}v^2 + (\frac{\sqrt{13}}{4}u - \frac{3}{2\sqrt{13}}v)^2.\end{aligned}$$

Donc,

$$f_V(v) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{v^2}{26}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{13}}{4}u - \frac{3}{2\sqrt{13}}v)^2)du.$$

On applique maintenant le changement de variable $t = \frac{\sqrt{13}}{4}u - \frac{3}{2\sqrt{13}}v$ (à v fixé), pour obtenir

$$\begin{aligned}f_V(v) &= \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{v^2}{26}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{4}{\sqrt{13}} dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{13}} e^{-\frac{v^2}{26}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{13}} e^{-\frac{v^2}{26}} \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 13}} e^{-\frac{v^2}{2\times 13}}.\end{aligned}$$

On trouve donc $V = 3X + 2Y \sim \mathscr{N}(0, 13)$.