LICENCE 2 MIASHS - PROBABILITES III

Contrôle continu du lundi 19 avril 2021

INSTRUCTIONS POUR LA REMISE DE LA COPIE

(-1 point pour toute copie qui ne respecte pas l'une de ces instructions)

1 - *Ecrivez vos prénom et nom en haut, à gauche de la première page de la copie.*

2 - *Composez sur une copie vierge (écriture manuscrite) de 13h45 à 15h15.* **Numérotez les pages!**

3 - *A partir de 15h15 : scannez vos feuilles et enregistrez le tout sous* **un seul fichier** *au format pdf* (avec un smartphone, vous pouvez utiliser par exemple l'application gratuite Adobe Scan).

4 - *Assurez-vous que le fichier présente votre devoir* **dans l'ordre, dans le bon sens (pas de rotation de la feuille), et qu'il est lisible.**

5 - *Déposez le fichier sur "Remise du devoir" (page cursus du cours) avant 15h30.*

Le sujet comporte une page
Toute réponse doit être justifiée

EXERCICE 1 – Trouver C pour que les fonctions ci-dessous soient des densités sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f_1(x,y) = Cx^2\sqrt{y}\mathbf{1}_{[-1,1]\times[0,1]}(x,y)$.
2. $f_2(x,y) = Cxye^{-y}\mathbf{1}_{[0,1]\times\mathbb{R}_+}(x,y)$.

EXERCICE 2 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité f, où

$$f(x) = 2(1-x)\mathbf{1}_{]0,1[}(x).$$

1. Calculer la variance et la médiane de X.
2. Calculer la densité de la variable aléatoire $\sqrt{X}$.
3. Déterminer la densité de la variable aléatoire $\frac{1}{X}$.

EXERCICE 3 – Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 1\}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x,y) = 5\frac{x}{\sqrt{y}}\mathbf{1}_D(x,y).$$

1. Calculer la densité marginale de X.
2. Déterminer $\mathbb{E}(\frac{\sqrt{Y}}{X})$ et $\mathbb{E}(\sqrt{Y})$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{2})$?

Pour l'exercice qui suit, on rappelle que si $\lambda > 0$, la densité de la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ est $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^\star}(x)$. De plus, on pourra utiliser sans preuve que les moments d'ordre 1, 2 et 3 d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ valent respectivement $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{2}{\lambda^2}$ et $\frac{6}{\lambda^3}$.

EXERCICE 4 – Soient X et Y des variables aléatoires réelles indépendantes, telles que $X \sim \mathscr{E}(1)$ et $Y \sim \mathscr{E}(2)$.

1. Calculer la densité du couple de variables aléatoires $(X, X+Y)$.
2. Calculer la densité de la variable aléatoire $X+Y$.
3. Déterminer la covariance entre X^2 et $X+Y$.