CORRIGE DU CC2

Exercice 1

① On calcule $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = c\int_{\mathbb{R}^2} x^2\sqrt{y}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} c\int_{-1}^{1} x^2\left(\int_0^1\sqrt{y}\,dy\right)dx$

$$= c\int_{-1}^{1} x^2\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^1 dx = \frac{2c}{3}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2c}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{9}c$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c = \frac{9}{4}$ et pour cette valeur, $f_1(x,y)\geq 0$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ donc f_1 est une densité.

② On calcule $\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = c\int_{\mathbb{R}^2} xye^{-y}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} c\int_0^1 x\left(\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy\right)dx$

Or, une IPP donne $\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy = \underbrace{\left[y\times(-e^{-y})\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1$, d'où

$\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = c\int_0^1 x\,dx = c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{2}$. Donc $\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c = 2$ et pour cette valeur, $f_2(x,y)\geq 0$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$ donc f_2 est une densité.

Exercice 2

① $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ et par le théorème de Transfert,

$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$. Par suite, d'après Koenig,

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

Calculons la f.r. F_X de X : comme $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$, on a $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$. Pour $x \in [0,1]$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \underset{\substack{\text{car}\\ x\in[0,1]}}{=} \int_0^x (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{2}$

La médiane m de X vérifie $F_X(m) = \frac{1}{2}$, donc $m \in [0,1]$ et ainsi $m - \frac{m^2}{2} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ ou $m = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Comme $\frac{2+\sqrt{2}}{2} \notin [0,1]$, on a $m = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

② La fonction $\varphi :]0,1[\to]0,1[$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante et bijective et $\mathbb{P}(X \in]0,1[) = 1$. De plus, $\varphi^{-1}(y) = y^2$ $\forall y \in]0,1[$

D'après le théorème 1.4.1, on a alors $f_{\sqrt{X}}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f(\varphi^{-1}(y)) = 2\sqrt{y^2} \times 2(1-y^2)\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y) = 4y(1-y^2)\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$

Exercício 3

① On a $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 5\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{y}} \mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}\,dy = 5\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{y}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\, \mathbb{1}_{]x,1[}(y)\,dy = 5x\,\mathbb{1}_{]0,1[}(x) \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy$

$= 5x\,\mathbb{1}_{]0,1[}(x) \left[2\sqrt{y}\right]_x^1 = 10x(1-\sqrt{x})\,\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

② $\mathbb{E}\left(\frac{\sqrt{Y}}{X}\right) \overset{\text{Transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{y}}{x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \cancel{\frac{\sqrt{y}}{x}}\, 5\, \cancel{\frac{x}{\sqrt{y}}}\, \mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} 5\int_0^1 \left(\int_x^1 dy\right) dx = 5\int_0^1 (1-x)\,dx$

$= 5\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{2}$

$\mathbb{E}(\sqrt{Y}) \overset{\text{Transfert}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{y}\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \cancel{\sqrt{y}}\, 5\, \frac{x}{\cancel{\sqrt{y}}}\, \mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}} \overset{\text{Fubini}}{=} 5\int_0^1 x\left(\int_x^1 dx\right) dy = 5\int_0^1 x(1-x)\,dx$

$= 5\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 5\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$

③ $\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{1/2}^{+\infty} 10\,x(1-\sqrt{x})\,\mathbb{1}_{]0,1[}(x)\,dx = 10\int_{1/2}^1 \left(x - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 10\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_{1/2}^1$

$= 10\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{1}{8} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{2^{5/2}}\right) = 10\left(-\frac{1}{40} + \frac{1}{5\times 2^{3/2}}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4

① Soit $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \{(z,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<z<t\} \\ (x,y) \longmapsto (x, x+y) \end{array}$. Alors φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour calculer φ^{-1}, on écrit pour $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<z<t$ et $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$: $(z,t)=\varphi(x,y)=(x,x+y)$

$\Leftrightarrow (x,y)=(z,t-z)$ d'où $\varphi^{-1}(z,t)=(z,t-z)$ et $\det J_{\varphi^{-1}}(z,t)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=1$

Comme φ est donc un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$, $(X,X+Y)=\varphi(X,Y)$ et $f_{X,Y}(x,y)=2e^{-x-2y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}(x,y)$ (car $X \perp\!\!\!\perp Y$)

d'où $\mathbb{P}((X,Y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*)=1$, on a avec le théorème 4.5-1 :

$$f_{X,X+Y}(z,t)=f_{X,Y}(\varphi^{-1}(z,t))\,|\det J_{\varphi^{-1}}(z,t)|=2e^{-z-2(t-z)}\mathbb{1}_{\{0<z<t\}}=2e^{z-2t}\mathbb{1}_{\{0<z<t\}}.$$

② La densité de $X+Y$ est une densité marginale du couple $(X,X+Y)$. Donc

$$f_{X+Y}(t)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,X+Y}(z,t)\,dz=2\int_{\mathbb{R}} e^{z-2t}\mathbb{1}_{\{0<z<t\}}\,dz=2\int_{\mathbb{R}} e^{z-2t}\mathbb{1}_{]0,t[}(z)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\,dz$$

$$=2e^{-2t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\int_0^t e^z\,dz=2e^{-2t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)\,[e^z]_0^t=2e^{-2t}(e^t-1)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)$$

③ On sait que

$$\mathrm{cov}(X^2, X+Y) = \mathbb{E}\big(X^2(X+Y)\big) - \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X^3 + X^2Y) - \mathbb{E}(X^2)\big(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)\big)$$

$$= \mathbb{E}(X^3) + \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}(X^2)\big(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)\big)$$

Or, d'après l'indication, $\mathbb{E}(X^3)=6$, $\mathbb{E}(X^2)=2$, $\mathbb{E}(X)=1$ et $\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}$. Pour calculer $\mathbb{E}(X^2Y)$, on peut remarquer que comme $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathbb{E}(X^2Y)=\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y)$ par le théorème 5-2-1. Ou bien, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2Y) = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 y\, e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, 2e^{-2y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} x^2 e^{-x}\,dx}_{\text{moment d'ordre de } \mathcal{E}(1)} \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} 2y\, e^{-2y}\,dy}_{\text{moment d'ordre 1 de } \mathcal{E}(2)} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Par suite, $\mathrm{cov}(X^2, X+Y) = 6 + 1 - 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 4$