Licence 2 MIASHS

Contrôle Continu du lundi 7 mars 2022 – Durée 1h30

Documents et calculatrice interdits

Ecrire les réponses et calculs sur cette copie, en respectant les délimitations

---

NOM :

PRENOM :

EXERCICE 1 – Pour quelle valeur de C les fonctions ci-dessous sont-elles des densités sur $\mathbb{R}$?

---

1. $f_1(x) = (x+1)\mathbb{1}_{[0,C]}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_0^C (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^C = \frac{C^2}{2}+C$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1 \iff C^2+2C-2=0$

$\iff C = \frac{-2\pm\sqrt{12}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$. Comme $C\geq 0$, on prend $C=-1+\sqrt{3}$ auquel cas $f_1(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Donc f_1 est une densité si $\boxed{C=-1+\sqrt{3}}$

---

2. $f_2(x) = C(x^3+1)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = C\int_0^1 (x^3+1)\,dx = C\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1 = \frac{5}{4}C$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = 1$

$\iff C=\frac{4}{5}$, auquel cas $f_2(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Donc f_2 est une densité si $\boxed{C=\frac{4}{5}}$

---

3. $f_3(x) = Cxe^{-x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\,dx = C\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx = C\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{C}{2}$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\,dx = 1 \iff C=2$, auquel cas $f_3(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$. Donc

f_3 est une densité si $\boxed{C=2}$

EXERCICE 2 – **Pour chaque variable aléatoire réelle ci-dessous, calculer sa fonction de répartition et sa médiane.**

---

1. La variable aléatoire réelle X_1 qui possède pour densité $g_1(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathbb{1}_{]0,1]}(x)$.

Tout d'abord, comme $\mathbb{P}(X_1 \in [0,1]) = 1$, on a $F_{X_1}(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_{X_1}(x) = 1$ si $x > 1$. Puis,
si $x \in [0,1]$, $F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} g_1(t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t}\,dt = \frac{3}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^x = x^{3/2}$.

Pour la médiane $\mathcal{M}_1$, on a $F_{X_1}(\mathcal{M}_1) = \frac{1}{2}$ ce qui entraîne $\mathcal{M}_1 \in [0,1]$ (sinon $F_{X_1}(\mathcal{M}_1) = 0$ ou 1)
d'où $\mathcal{M}_1^{3/2} = \frac{1}{2} \iff \boxed{\mathcal{M}_1 = \frac{1}{2^{2/3}}}$

---

2. La variable aléatoire réelle X_2 qui possède pour densité $g_2(x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

Tout d'abord, comme $\mathbb{P}(X_2 \in [1,+\infty[) = 1$, on a $F_{X_2}(x) = 0$ si $x < 1$. Puis, si $x \geq 1$,
$F_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{x} g_2(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$.

Pour la médiane $\mathcal{M}_2$, on a $F_{X_2}(\mathcal{M}_2) = \frac{1}{2}$, ce qui entraîne $\mathcal{M}_2 \geq 1$ (sinon $F_{X_2}(\mathcal{M}_2) = 0$)
d'où $1 - \frac{1}{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{\mathcal{M}_2} = \frac{1}{2} \iff \boxed{\mathcal{M}_2 = 2}$

EXERCICE 3 – **Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = 2e^{-2x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.**

---

1. Calculer la densité de la variable aléatoire réelle $X + 1$.

On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+) = 1$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[\\ x \mapsto x+1 \end{cases}$ est strictement croissante et C^1.
Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1,+\infty[$ sont tels que $\varphi(x) = y$, alors $x+1 = y \iff x = y-1$ d'où
$\varphi^{-1}(y) = y - 1$. Enfin, $\varphi'(x) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.
Or, $X+1 = \varphi(X)$, d'où

$$f_{X+1}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f(\varphi^{-1}(y)) = 2e^{-2(y-1)}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y-1) = 2e^2e^{-2y}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$$

---

2. **Calculer la densité de la variable aléatoire réelle $\sqrt{X}$.**

On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+^*) = 1$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$.

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $y = \varphi(x)$, alors $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2$ d'où $\varphi^{-1}(y) = y^2$.

Enfin, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Or, $\sqrt{X} = \varphi(X)$, d'où

$$f_{\sqrt{X}}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{\left|\frac{1}{2\sqrt{y^2}}\right|} 2e^{-2y^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y^2) = 4y\, e^{-2y^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$$

3. **Déterminer $\mathbb{E}(X)$.**

Comme $X \sim \mathcal{E}(2)$, on a vu en cours que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$. Mais il fallait bien sûr détailler le calcul !

4. **Calculer $\mathbb{E}(X^2)$.**

Comme $X \sim \mathcal{E}(2)$, on a vu en cours que $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$.

Mais il fallait bien sûr détailler le calcul !

EXERCICE 4 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. *On rappelle que la dérivée de la fonction* $\arctan(x)$ *est* $1/(1+x^2)$.

---

1. Calculer la densité de la variable aléatoire X^2.

Calculons la f.r. de X^2. On a $F_{X^2}(x) = 0 \ \forall x \leq 0$ car $\mathbb{P}(X^2 \leq 0) = 0$. Si $x > 0$,

$F_{X^2}(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(t)\,dt = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$, si F est une primitive de f.

Alors, la dérivée F'_{X^2} de F_{X^2} vaut 0 si $x \leq 0$ et, si $x > 0$:

$$F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(-\sqrt{x}) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{2}{1+x} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1+x}$$

Vérifions maintenant que F'_{X^2} est une densité. On a bien $F'_{X^2}(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et, en considérant le changement de variable $x = y^2$ (qui est bien un chgt de variable car $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ y \mapsto y^2 \end{cases}$ est strictement croissante et C^1) pour lequel $y = \sqrt{x}$ et $dx = 2y\,dy$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'_{X^2}(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{y}\,\frac{1}{1+y^2}\,2y\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\arctan(y)\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1.$$

Ainsi, F'_{X^2} est une densité, donc c'est la densité de X^2.

---

2. Déterminer $\mathbb{E}((1+X^2)e^{-X})$ (*utiliser le théorème de transfert*). (QUESTION BONUS)

D'après le théorème de transfert, on sait que la variable aléatoire $(1+X^2)e^{-X}$ est intégrable seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2)e^{-x}|\,f(x)\,dx < \infty.$$

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2)e^{-x}|\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)e^{-x}\,\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\pi}\,dx = +\infty$!

La variable aléatoire $(1+X^2)e^{-X}$ n'est donc pas intégrable

---