Licence 2 MIASHS – Probabilités 3

Contrôle continu du lundi 25 avril 2022 – Durée 1h30 – Documents et calculatrice interdits

Ecrire les réponses et calculs sur cette copie, en respectant les délimitations

---

NOM :

PRENOM :

EXERCICE 1 – Trouver C pour que les fonctions ci-dessous soient des densités sur $\mathbb{R}^2$.

---

1. $f_1(x,y) = C(x^2+y)\mathbf{1}_{[-1,0]\times[0,1]}(x,y)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} C\int_0^1\left(\int_0^1 (x^2+y)\,dx\right)dy = C\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+xy\right]_0^1 dy$$

$$= C\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y\right)dy = C\left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5C}{6}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow C = \frac{6}{5}$, auquel cas $f_1(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f_1$ est une densité sur $\mathbb{R}^2$ ssi $C = \frac{6}{5}$

---

2. $f_2(x,y) = Cxe^{-x^2-2y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$.

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} C\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2y}\,dy\right)dx = C\left[\frac{e^{-x^2}}{-2}\right]_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{C}{4}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^2} f_2(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow C = 4$, auquel cas $f_2(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f_2$ est une densité sur $\mathbb{R}^2$ ssi $C = 4$

EXERCICE 2 – Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = \frac{3}{x^4}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

---

1. Calculer la variance de X.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = 3\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = 3\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^{+\infty} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = 3\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 3\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{+\infty} = 3$$

Donc $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$

2. Calculer la médiane de X.

Calculons tout d'abord la f.r. F_X de X. On a $F_X(x)=0$ si $x<1$ et, pour $x\geq 1$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^x \frac{3}{t^4}\,dt = 3\left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_1^x = 1-\frac{1}{x^3}$.

On cherche donc π t.q. $F_X(\pi)=\frac{1}{2}$, d'où $\pi \geq 1$ et π est t.q. $1-\frac{1}{\pi^3}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \pi^3 = 2 \Leftrightarrow \pi = 2^{1/3}$

La médiane de X est donc $\pi = 2^{1/3}$

3. Déterminer la densité de la variable aléatoire $\frac{1}{X}$.

On applique le théorème 1.4.1 du cours. On a $\mathbb{P}(X\in]1,+\infty[)=1$ et

$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ est strictement décroissante et C^1 sur $]1,+\infty[$.

De plus, si $x,y\in\mathbb{R}$ sont tq $y=\varphi(x)=\frac{1}{x}$ alors $x=\frac{1}{y}$ d'où $\varphi^{-1}(y)=\frac{1}{y}$.

Enfin, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\forall x\in]1,+\infty[$.

Alors, comme $\varphi(x)=\frac{1}{x}$:

$f_{\frac{1}{X}}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f(\varphi^{-1}(y)) = \frac{3}{\varphi^{-1}(y)^2} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(\varphi^{-1}(y)) = 3y^2\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$,

car $\varphi(]1,+\infty[)=]0,1[$.

EXERCICE 3 – Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f(x,y)=(x+y)\mathbf{1}_{]0,1[^2}(x,y).$$

1. Calculer la densité marginale de X.

$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\int_0^1 (x+y)\,dy = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$

2. En déduire $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

---

3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(X^2Y)$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 x\left(\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2Y) = \int_{\mathbb{R}} x^2 y f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 x^2\left(\int_0^1 (xy+y^2)\,dy\right) dx \overset{\text{cf + haut}}{=} \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72}$$

---

4. En déduire $\mathrm{cov}(XY, X)$.

$$\mathrm{cov}(XY, X) = \mathbb{E}(XYX) - \mathbb{E}(XY)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2Y) - \mathbb{E}(XY)\,\mathbb{E}(X)$$
$$= \frac{17}{72} - \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{12} = \frac{17-14}{72} = \frac{3}{72} = \frac{1}{24}$$

---

5. Calculer la densité du couple de variables aléatoires $(X, X+Y)$.

On applique le th. 4.5.1 du cours. On a $P((X,Y) \in]0,1[^2) = 1$ et on note donc.

$$\varphi : \begin{cases}]0,1[^2 \to \Delta := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 ;\ 0 < u < 1 \text{ et } 0 < v-u < 1\} \\ (x,y) \mapsto (x, x+y) \end{cases}$$

Alors φ est injective, car si $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in]0,1[^2$ sont tq $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$ on a $(x_1, x_1+y_1) = (x_2, x_2+y_2)$ d'où $x_1 = x_2$ et $x_1+y_1 = x_1+y_2$ d'où $y_1 = y_2$

φ est aussi surjective car si $(u,v)\in\Delta$, on a $\varphi(u,v-u)=(u,v)$ et $(u,v-u)\in]0,1[^2$.

On tire de $\varphi(u,v-u)=(u,v)$ que $\varphi^{-1}(u,v)=(u,v-u)$ et donc φ^{-1}, comme φ, est $\mathcal{C}^1$. Globalement, on a montré que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

D'autre part, $\forall (u,v)\in\Delta$: $\det J_{\varphi^{-1}}(u,v)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=1$.

Alors, comme $(X,X+Y)=\varphi(X,Y)$:

$$f_{X,X+Y}(u,v)=f(\varphi^{-1}(u,v))\,|\det J_{\varphi^{-1}}(u,v)|=(u+v-u)\,\mathbb{1}_{]0,1[^2}(\varphi^{-1}(u,v))$$

$$=v\,\mathbb{1}_{\varphi(]0,1[^2)}(u,v)=v\,\mathbb{1}_{\Delta}(u,v),\text{ car }\varphi\text{ est surjective.}$$

---

6. Déterminer la densité de la variable aléatoire X + Y.

Comme $\mathbb{P}((X,Y)\in]0,1[^2)=1$, on a $\mathbb{P}(X+Y\in]0,2[)=1$. Par suite, $f_{X+Y}(v)=0\ \forall v\notin]0,2[$.

Soit maintenant $v\in]0,2[$. On a

$$f_{X+Y}(v)=\int_{\mathbb{R}} f_{X,X+Y}(u,v)\,du=v\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\Delta}(u,v)\,du=v\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\Delta(v)}(u)\,du,$$ où l'on

a noté $\Delta(v)=\{u\in\mathbb{R} : 0<u<1 \text{ et } 0<v-u<1\}=\{u\in\mathbb{R} : 0<u<1 \text{ et } v-1<u<v\}$

On remarque que si $v\in]0,1[$, $\Delta(v)=]0,v[$ et si $v\in[1,2[$, $\Delta(v)=]v-1,1[$.

Alors :

- $v\in]0,1[$: $f_{X+Y}(v)=v\int_0^v du=v^2$
- $v\in[1,2[$: $f_{X+Y}(v)=v\int_{v-1}^1 du=v(2-v)$

Globalement, $f_{X+Y}(v)=\begin{cases}0 & \text{si } v\notin]0,2[\\ v^2 & \text{si } v\in]0,1[\\ v(2-v) & \text{si } v\in[1,2[\end{cases}$
