PROBAS III - TD n°1

Lois à densité

Exercice 1

Une fonct° $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité sur $\mathbb{R}$ ssi :

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1\. * $\forall n \in \mathbb{N}$ et $c > 0$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* Si $n > 1$, f est intégrable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} cx^{-n}dx = c\left[\frac{-1}{n-1}x^{-(n-1)}\right]_1^{+\infty} = c\left(0 - \left(\frac{-1}{n-1}\right)\right) = \frac{c}{n-1}$$

donc f est une densité ssi $\boxed{c = n-1}$.

2\. * $\forall c > 0$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

* On remarquera au préalable que : $\frac{c}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$

On a alors $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{2c}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx = c\left[\arcsin(2x-1)\right]_0^1$$
$$= c\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = c\pi$$

donc f est une densité ssi $\boxed{c = \frac{1}{\pi}}$

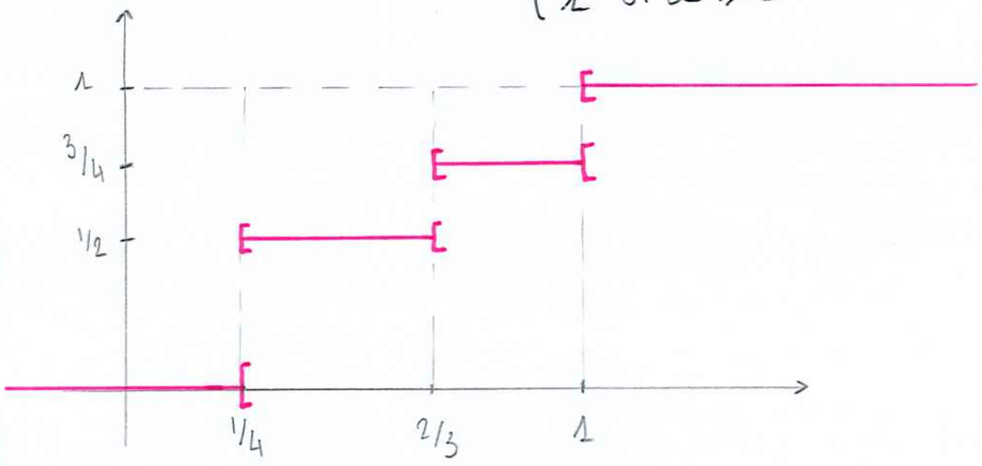
3\. * $\forall c > -1$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{c} \frac{x+1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{c} x+1\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{c}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2} + c - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{2} + c + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4} = \frac{(c+1)^2}{4}$$

donc f est une densité ssi $\boxed{c = 1}$ (2 solutions $c = -3$ et $c = 1$)
impossible

Exercice 2

1\. Soit X de fdr $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/4 \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/4, 2/3[\\ 3/4 & \text{si } x \in [2/3, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$



$P(X \geq 2/3) = 1 - P(X < 2/3) = 1 - F\left(\frac{2}{3}^-\right) = \frac{1}{2}$

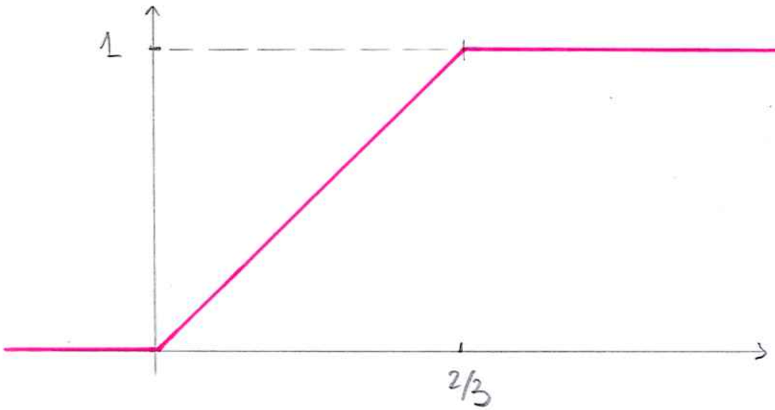
$P(X < 2/3) = F\left(\frac{2}{3}^-\right) = \frac{1}{2}$

$P(X>2/3) = 1 - P(X \leq 2/3) = 1 - F\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(X \in [1/4, 2/3]) = P(X \leq 2/3) - P(X < 1/4) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{4}^-\right) = \frac{3}{4}$

F est la fdr d'une loi de proba discrète → elle ne possède pas de densité.

2. Soit X de fdr $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{3x}{2} & \text{si } x \in [0, 2/3[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$



$P(X \geq 2/3) = 1 - P(X < 2/3) = 1 - F\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

$P(X < 2/3) = P(X \leq 2/3) = F(2/3) = 1$

$P(X > 2/3) = P(X \geq 2/3) = 0$

$P(X \in [1/4, 2/3]) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

F est dérivable (sauf en 0 et 1) et sa dérivée $f(x) = \frac{3}{2} \mathbb{1}_{[0,2/3]}(x)$ est une densité donc la loi de X possède une densité.

Exercice 3.

1. X est une variable aléatoire de loi uniforme continue sur l'intervalle $[0, 60]$

[X mesure le retard de l'ami en question en minutes].

Sa fonction de répartition est donnée par :

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{x}{60} & \text{si } 0 \leq x \leq 60 \\ 1 & \text{si } x>60 \end{cases}$

2. a. $P(X=15) = 0$

b. $P(X \leq 15) = F_X(15) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$

c. $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

d. $P(X \geq 55) = 1 - P(X \leq 55) = 1 - F_X(55) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

e. $P(X \in [25, 35]) = P(X \leq 35) - P(X \leq 25) = \frac{35-25}{60} = \frac{1}{6}$

Exercice 4

On sait que $f_X(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$

Soit $t < a$ $\quad F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0$

Soit $t > b$ $\quad F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx + \int_{a}^{b} f_X(x)dx + \int_{b}^{t} f_X(x)dx$

$= 0 + 1 + 0 = 1$

X ne prend ses valeurs que dans l'intervalle $[a,b]$

Exercice 5

Traduisons le principe de Pareto en termes probabilistes.

Soit $\alpha > 0$

$$P(X \geq x) = \frac{c}{x^\alpha} \Leftrightarrow P(X \leq x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} = F_X(x)$$

Une telle fdr est dérivable avec

$$F_X'(x) = -c \times (-\alpha)\, x^{-\alpha-1} = \frac{c\alpha}{x^{+(\alpha+1)}} = f(x)$$

[on doit avoir $c>0$ et $x>0$ pour avoir une densité]

On intègre pr trouver la constante c. f est intégrable ssi $\alpha > 0$ (mais pas intégrable en 0). On note R_m la richesse
$(\alpha+1 > 1)$
minimale avec $R_m > 0$

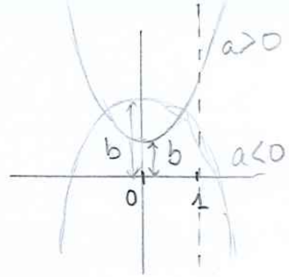
$$\int_{R_m}^{+\infty} f(x)\,dx = c\alpha \int_{R_m}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx = c\alpha \left[\frac{-1}{\alpha x^\alpha}\right]_{R_m}^{+\infty} = \frac{c\alpha}{\alpha R_m^\alpha}$$

d'où $\boxed{c = R_m^\alpha}$

Finalement, la densité régissant la richesse des individus est donnée par $\boxed{f_X(x) = \frac{\alpha R_m^\alpha}{x^{\alpha+1}}}$ → c'est la loi de Pareto.

Exercice 6

Soit $f(x) = (ax^2+b)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$



1. On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2+b)\,dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_0^1 = \frac{a}{3} + b$

On doit avoir $\frac{a}{3} + b = 1$

De plus, f doit être positive avec $f(0) = b$ donc $b \geq 0$
$f(1) = a+b$ et $a+b \geq 0$

2. $P(X \geq 0{,}5) = 7/8 \Leftrightarrow \int_{0,5}^{1} (ax^2+b)\,dx = \frac{7}{8} = \left[\frac{a}{3}x^3 + bx\right]_{1/2}^{1}$

$$= \frac{a}{3} + b - \frac{a}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{b}{2}$$

$$= \frac{7}{24}a + \frac{b}{2} = \frac{7}{8}$$

d'où $\begin{cases} \frac{a}{3} + b = 1 \\ \frac{7}{24}a + \frac{b}{2} = \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-a}{3} + 1 \\ \frac{3a}{24} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-a}{3} + 1 \\ \frac{3a}{24} = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-a}{3} + 1 \\ a = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 3 \end{cases}$

Exercice 7

$X =$ durée de f^{nt} d'un composant électronique

avec $f_X(t) = at^2 e^{-bt} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

1 - On doit avoir $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (positivité + intégrabilité)

et $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$

Or $\int_0^{+\infty} at^2e^{-bt}\,dt = a\left\{\left[\frac{-t^2}{b}e^{-bt}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{b}\int_0^{+\infty} te^{-bt}\,dt\right\} = \frac{2a}{b}\int_0^{+\infty} te^{-bt}\,dt$

$u(t) = t^2$ $\quad u'(t) = 2t$

$v'(t) = e^{-bt}$ $\quad v(t) = \frac{-1}{b}e^{-bt}$

$u(t) = t$ $\quad u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{-bt}$ $\quad v(t) = \dots$

$$= \frac{2a}{b}\left\{\left[\frac{-t}{b}e^{-bt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-bt}\,dt\right\}$$

$$= \frac{2a}{b^2}\left[\frac{-1}{b}e^{-bt}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2a}{b^3}$$

donc f_X est une densité ssi $\boxed{2a = b^3}$

2 - On veut avoir $\mathbb{P}(X \geq 100) \geq \frac{1}{2}$

i.e $\int_{100}^{+\infty} at^2e^{-bt}\,dt \geq \frac{1}{2}$

Or $\int_{100}^{+\infty} at^2e^{-bt}\,dt = a\left\{\left[\frac{-t^2}{b}e^{-bt}\right]_{100}^{+\infty} + \frac{2}{b}\int_{100}^{+\infty} te^{-bt}\,dt\right\}$

$$= \frac{a}{b} \times 100^2 e^{-100b} + \frac{2a}{b}\left\{\left[\frac{-t}{b}e^{-bt}\right]_{100}^{+\infty} + \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} e^{-bt}\,dt\right\}$$

$$= \frac{10000a}{b}e^{-100b} + \frac{200a}{b^2}e^{-100b} + \frac{2a}{b^2}\left[\frac{-1}{b}e^{-bt}\right]_{100}^{+\infty}$$

$$= \frac{10000a}{b}e^{-100b} + \frac{200a}{b^2}e^{-100b} + \underbrace{\frac{2a}{b^3}}_{=1}e^{-100b}$$

$$= (5000b^2 + 100b + 1)\,e^{-100b}$$

d'où : on cherche b tq $\underbrace{(5000b^2 + 100b + 1)\,e^{-100b}}_{\text{f}^{N} \text{ strict}^{t} \text{ décroissante en } b} \geq \frac{1}{2}$

avec $\lim_{b \to +\infty} f(b) = 0$, $f(0) = 1$

⇒ Résolution numérique (Wolfram Alpha) avec méthode de Newton $\boxed{0 \leq b \leq 0{,}026}$

3 - On cherche a tq $\mathbb{P}(X \leq 50) = 1/2$

i.e $\int_0^{50} at^2e^{-bt}\,dt = \frac{1}{2} = a\left\{\left[\frac{-t^2}{b}e^{-bt}\right]_0^{50} + \frac{2}{b}\int_0^{50} te^{-bt}\,dt\right\}$

$$= a\left\{\frac{-2500}{b}e^{-50b} - 0 + \frac{2}{b}\left(\left[\frac{-t}{b}e^{-bt}\right]_0^{50} + \frac{1}{b}\int_0^{50} e^{-bt}\,dt\right)\right\}$$

$$= \frac{-2500a}{b}e^{-50b} + \frac{2a}{b}\left(\frac{-50}{b}e^{-50b} - 0 + \frac{1}{b}\left[\frac{-e^{-bt}}{b}\right]_0^{50}\right)$$

$$= \frac{-2500a}{b}e^{-50b} - \frac{100a}{b^2}e^{-50b} - \underbrace{\frac{2a}{b^3}}_{=1}e^{-50b} + \underbrace{\frac{2a}{b^3}}_{=1} = \frac{1}{2}$$

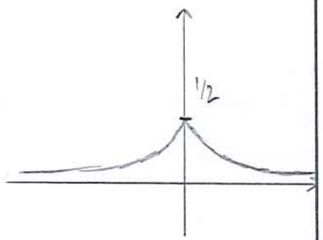
$$\Leftrightarrow \frac{2500a}{b}e^{-50b} + \frac{100a}{b^2}e^{-50b} + e^{-50b} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1250b^2 + 50b + 1)\,e^{-50b} = \frac{1}{2}$$

⇒ résolution numérique $\boxed{b \simeq 0{,}05348\dots}$

Exercice 8

1_ Soit X_1 va réelle de densité $g_1(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$



Fonction de répartition . Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} dt$$

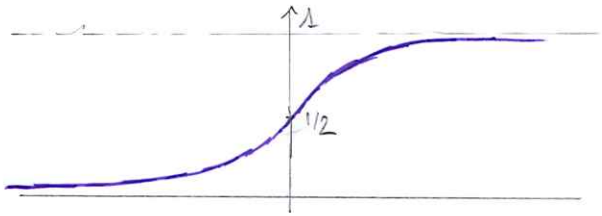
- Si $x < 0$ alors

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} dt \underset{\text{symétrie (parité)}}{=} \frac{1}{2} \int_{-x}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \left[-e^{-t} \right]_{-x}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(0 - (-e^{+x})\right)$$
$$= \frac{1}{2} e^{x}$$

- Si $x \geq 0$ alors

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x} e^{-|t|} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{0}^{x} e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[-e^{-t} \right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-e^{-x} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}$$

d'où $F_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{+x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



Premier quartile On cherche x_1 tq $F_X(x_1) = 0,25$

comme $0,25 < 1/2$, on sait que $x_1 < 0$

et donc $\frac{1}{2} e^{x_1} = 0,25 \Leftrightarrow e^{x_1} = 0,5 \Leftrightarrow x_1 = \ln 0,5$
$= -\ln 2 = -0,69$

2_ Soit X_2 va réelle de densité $g_2(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ (4 bis)

Fonction de répartition . Soit $x \in \mathbb{R}$

- Si $x \leq 0$, $F_{X_2}(x) = 0$
- Si $x \geq 1$, $F_{X_2}(x) = 1$
- Si $0 < x < 1$

$$F_{X_2}(x) = \int_0^x \frac{3}{2} \sqrt{t} \, dt = \left[t\sqrt{t} \right]_0^x = x\sqrt{x}$$

d'où $F_{X_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Premier quartile

On cherche x_1 tq $F_{X_2}(x_1) = 0,25$ (avec $0 < x_1 < 1$)

i.e $x_1^{3/2} = 0,25 \Leftrightarrow x_1 = 0,25^{2/3}$
$\simeq 0,3969$

Exercice 9

Soit X la taille des femmes françaises.

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

$m = 1{,}58$
$\sigma = 0{,}06$

1 - Soit $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Soit $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq y\right) = P(X - m \leq \sigma y) = P(X \leq \sigma y + m)$$
$$= F_X(\sigma y + m)$$

d'où en dérivant par rapport à y :

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} F_X(\sigma y + m) = \sigma f_X(\sigma y + m)$$
$$= \sigma \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{\sigma y + m - m}{\sigma}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

On retrouve bien la densité d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2 - On cherche a tq $P(m - a \leq X \leq m + a) = 0{,}9$

$$\Leftrightarrow P(-a \leq X - m \leq a) = 0{,}9$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{-a}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{a}{\sigma}\right) = 0{,}9$$
$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \underbrace{\Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right)}_{1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)} = 0{,}9$$
$$\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}9 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{1+0{,}9}{2} = 0{,}95$$

table ou logiciel $\rightarrow \frac{a}{\sigma} \approx 1{,}644854$

d'où $a = 1,644854 \times 0,06 = 0,09869$

3_ On cherche $P(m-a \leqslant X \leqslant m-\frac{a}{3}) = P(-a \leqslant X-m \leqslant \frac{-a}{3})$

$$= P\left(\frac{-a}{\sigma} \leqslant \frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{-a}{3\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{-a}{3\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right)$$

$$= 1-\Phi\left(\frac{a}{3\sigma}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)$$

$$= \underbrace{\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)}_{=0,95} - \Phi\left(\frac{a}{3\sigma}\right)$$

$$P\left(m-\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant m+\frac{a}{3}\right) = P\left(\frac{-a}{3\sigma} \leqslant \frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{a}{3\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{3\sigma}\right) - 1$$

$$P\left(m+\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant m+a\right) = P\left(\frac{a}{3\sigma} \leqslant \frac{X-m}{\sigma} \leqslant \frac{a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a}{3\sigma}\right)$$

Or $\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) \simeq 0,95$ et $\Phi\left(\frac{a}{3\sigma}\right) \simeq 0,7083$

d'où $P(m-a \leqslant X \leqslant m-\frac{a}{3}) \simeq 0,2417 = t_S$

$P(m-\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant m+\frac{a}{3}) \simeq 0,4165 = t_M$

$P(m+\frac{a}{3} \leqslant X \leqslant m+a) \simeq 0,2417 = t_L$

En terme de production (en pourcentage)

$$\begin{cases} t_S/0,9 = 26,86\% \\ t_M/0,9 = 46,28\% \\ t_L/0,9 = 26,86\% \end{cases}$$

Exercice 10

R = rayon du disque (en cm)

$R \sim \mathcal{E}(1/10) \rightarrow F_R(x) = 1 - e^{-\frac{1}{10}x}$ $\boxed{x \geqslant 0}$

Soit S la surface du disque $S = \pi R^2$ (en cm²)

1. $P(S \geqslant 500) = P(\pi R^2 \geqslant 500) = P(R^2 \geqslant \frac{500}{\pi})$

$$= P\left(R \geqslant \sqrt{\frac{500}{\pi}}\right) = 1 - F_R\left(\sqrt{\frac{500}{\pi}}\right)$$

$x \mapsto \sqrt{x}$ croissante

$$= e^{-\frac{1}{10} \times \sqrt{\frac{500}{\pi}}}$$

$$= e^{-\sqrt{\frac{5}{\pi}}} = \boxed{0,283}$$

2_ $P(S \leqslant 50) = \text{-----} = P\left(R \leqslant \sqrt{\frac{50}{\pi}}\right) = F_R\left(\sqrt{\frac{50}{\pi}}\right)$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{10}\sqrt{\frac{50}{\pi}}} = 1 - e^{-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}}$$

$$= \boxed{0,329}$$

Exercice 11

Soit X la longueur du bout de baguette (par exemple le bout restant ds la main)

On a $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

(l'autre morceau mesure $1-X$)

On cherche ici

$$P(X \geqslant 2(1-X)) + P(1-X \geqslant 2X) = P(X \geqslant 2-2X) + P(1 \geqslant 3X)$$

$= P(3X \geqslant 2) + P(3X \leqslant 1) = P(X \geqslant \frac{2}{3}) + P(X \leqslant \frac{1}{3})$

$= 1 - P(X \leqslant \frac{2}{3}) + P(X \leqslant \frac{1}{3})$

$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Exercice 12

Soit X de densité f_X

- Soit $Y = |X|$. Alors, si $y \leqslant 0$ $P(Y \leqslant y) = 0$ (valeur absolue)

Soit $y > 0$

$P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant y) = P(-y \leqslant X \leqslant y) = P(X \leqslant y) - P(X \leqslant -y)$

$= F_X(y) - F_X(-y)$

d'où $f_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(y) - F_X(-y))$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)}$

- Soit $Y = -X$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(-X \leqslant y) = P(X \geqslant -y) = 1 - P(X \leqslant -y)$

$= 1 - F_X(-y)$

d'où $\boxed{f_Y(y) = f_X(-y)}$

- Soit $Y = aX + b$. Soit $y \in \mathbb{R}$. (On suppose $a \neq 0$)

$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(aX + b \leqslant y) = P(aX \leqslant y - b)$

Si $a > 0$. $F_Y(y) = P(X \leqslant \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$

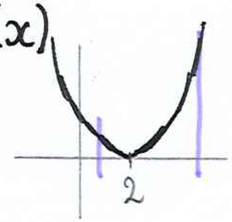
d'où $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a})}$

Si $a < 0$ $F_Y(y) = P(X \geqslant \frac{y-b}{a}) = 1 - F_X(\frac{y-b}{a})$

d'où $\boxed{f_Y(y) = \frac{-1}{a} f_X(\frac{y-b}{a})}$

Exercice 13

Soit X de densité $f_X(x) = \frac{2x}{15} \mathbb{1}_{[1,4]}(x)$



$x \mapsto (x-2)^2$ non monotone sur $[1,4]$

et $P(X \in [1,4]) = 1$

Soit $Y = (X-2)^2$

$1 \leqslant x \leqslant 4$
$-1 \leqslant x-2 \leqslant 2$
$0 \leqslant (x-2)^2 \leqslant 4$

$F_Y(y) = 0$ si $y \leqslant 0$

$F_Y(y) = 1$ si $y \geqslant 4$

si $y \in]0,4[$

$P(Y \leqslant y) = P((X-2)^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} + 2 \leqslant X \leqslant \sqrt{y} + 2)$

- Si $y \in [0,1]$ $1 \leqslant -\sqrt{y} + 2 \leqslant 2$ et $2 \leqslant \sqrt{y} + 2 \leqslant 3$

alors $F_Y(y) = \frac{2}{15}\int_{-\sqrt{y}+2}^{\sqrt{y}+2} x\,dx = \frac{2}{15}\left(\frac{(\sqrt{y}+2)^2-(-\sqrt{y}+2)^2}{2}\right)$

$= \frac{8\sqrt{y}}{15}$

d'où $f_Y(y) = \frac{8}{15}\times\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{4}{15\sqrt{y}}$ (si $y\in[0,1]$)

• Si $y\in[1,4]$ $\quad 0\leqslant -\sqrt{y}+2\leqslant 1$ et $3\leqslant\sqrt{y}+2\leqslant 4$

alors $F_Y(y) = \frac{2}{15}\int_{1}^{\sqrt{y}+2} x\,dx = \frac{2}{15}\left(\frac{(\sqrt{y}+2)^2-1}{2}\right) = \frac{y+4\sqrt{y}+3}{15}$

d'où $f_Y(y) = \frac{1}{15}+\frac{2}{15\sqrt{y}}$ (si $y\in[1,4]$)

Finalement $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{15}\left[\frac{4}{\sqrt{y}}\mathbb{1}_{[0,1]}(y) + \left(1+\frac{2}{\sqrt{y}}\right)\mathbb{1}_{[1,4]}(y)\right]}$

<u>Calcul des quartiles</u>

On cherche $q_{0,25}$ tq $P(Y\leqslant q_{0,25}) = 0,25$

[Pb : on ne sait pas si $q_{0,25}\in[0,1]$ ou à $[1,4]$ ....]

On commence par calculer $\frac{1}{15}\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{8}{15}\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = \frac{8}{15}\simeq 0,53$

On a donc $q_{0,25}<1$

d'où $P(Y\leqslant q_{0,25}) = \frac{1}{15}\int_0^{q_{0,25}}\frac{4}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{8}{15}\left[\sqrt{y}\right]_0^{q_{0,25}}$

$= \frac{8\sqrt{q_{0,25}}}{15}$

Or $\frac{8\sqrt{q_{0,25}}}{15} = \frac{1}{4} \iff \sqrt{q_{0,25}} = \frac{15}{32} \iff q_{0,25} = \left(\frac{15}{32}\right)^2 \simeq 0,22$

De même, $q_{0,5}<1$ et vérifie

$\frac{8\sqrt{q_{0,5}}}{15} = \frac{1}{2} \iff \sqrt{q_{0,5}} = \frac{15}{16} \iff q_{0,5} = \left(\frac{15}{16}\right)^2 \simeq 0,88$

Par contre $q_{0,75}>1$ et

$P(Y\leqslant q_{0,75}) = \frac{1}{15}\int_0^1\frac{4}{\sqrt{y}}\,dy + \frac{1}{15}\int_1^{q_{0,75}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{y}}\right)dy$

$= \frac{8}{15} + \frac{q_{0,75}-1}{15} + \frac{4}{15}\left[\sqrt{q_{0,75}}-1\right]$

$= \frac{7}{15} - \frac{4}{15} + \frac{q_{0,75}}{15} + \frac{4\sqrt{q_{0,75}}}{15} = \frac{1}{15}\left(3+q_{0,75}+4\sqrt{q_{0,75}}\right)$

$= \frac{3}{4}$

$\iff q_{0,75}+4\sqrt{q_{0,75}}+3 = \frac{45}{4} \iff q_{0,75}+4\sqrt{q_{0,75}} - \frac{33}{4} = 0$

solver $\rightarrow$ $q_{0,75} = \frac{9}{4}$

Exercice 14

Soit X de densité $h(x) = 2xe^{-x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

1. $\varphi(x) = 2x+1$

Thm du cours → on a bien $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante de classe $\mathcal{C}_1$

avec $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$ et $\varphi'(x) = 2$

$$f_{\varphi(X)}(x) = \frac{1}{|2|} h\left(\frac{x-1}{2}\right) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\, 2 \times \frac{x-1}{2}\, e^{-(x-1)^2/4} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

$$= \frac{x-1}{2}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{4}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

2. $\varphi(x) = x^2$

φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$\varphi'(x) = 2x$

$$f_{\varphi(X)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} h(\sqrt{x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

$$= e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Exercice 15

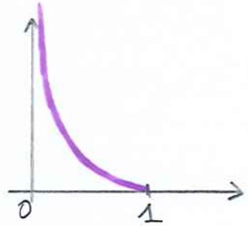
1. Soit $Y = 1 - X$ → Y est à valeurs de $[0,1]$ et $\forall y \in [0,1]$

$$P(Y \leq y) = P(1-X \leq y) = P(X \geq 1-y) = 1 - P(X < 1-y) = 1 - F_X(1-y)$$

Or $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ d'où $F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ 1-(1-y) = y \text{ si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - 0 = 1 \text{ si } y > 1 \end{cases}$

d'où $Y = 1 - X \sim \mathcal{U}([0,1])$

2. Soit $Z = \frac{1-X}{X}$



Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

donc $\forall z \leq 0$, $P(Z \leq z) = 0$

$\forall z \in \mathbb{R}_+^*$ $P(Z \leq z) = P\left(\frac{1-X}{X} \leq z\right) = P(1 - X \leq zX)$

$$= P(1 \leq (1+z)X) \underset{z+1>0}{=} P\left(X \geq \frac{1}{1+z}\right)$$

$$= 1 - P\left(X < \frac{1}{1+z}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\underbrace{1+z}_{>1}}\right)$$

Donc $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z} & \text{si } z > 0 \end{cases}$

3 - F_Z est continue et dérivable pour $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $(x \neq 0)$

avec $F_Z'(z) = \dfrac{1}{(1+z)^2}$

$\forall z > 0$

Soit $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1-z)^2} & \text{si } z > 0 \end{cases}$. f_Z est bien une densité

$\Rightarrow$ c'est la densité de la variable Z.

Quantile d'ordre p

On cherche x_p tq $F_X(x_p) = p$ avec $p \in]0,1[$

$$\frac{x_p}{1+x_p} = p \Leftrightarrow x_p = p(1+x_p)$$
$$\Leftrightarrow x_p - p x_p = p$$
$$\Leftrightarrow x_p(1-p) = p \Leftrightarrow \boxed{x_p = \frac{p}{1-p}}$$

4 - On a $\dfrac{1}{Z} = \dfrac{X}{1-X} = \dfrac{1-(1-X)}{(1-X)}$

Or, on a vu à la question 1 que $1-X \sim \mathcal{U}([0,1])$

donc Z et $\dfrac{1}{Z}$ suivent la même loi

Exercice 16

Soit X une v.a tq $X \sim C(m,a)$

avec $$f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2+(x-m)^2)}$$

1. * On a bien $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $(a>0,\ m\in\mathbb{R})$

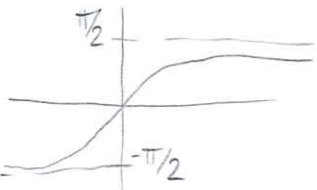
et $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(a^2+(x-m)^2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x-m}{a}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi a}\left[a \times \arctan\left(\frac{x-m}{a}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{a}{\pi a}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{a}{\pi a}\times \pi = 1.$$

$$\left(\arctan\left(\frac{x-m}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x-m}{a}\right)^2}$$



* f_X possède un axe de symétrie en $x=m$

→ sa médiane est en m.

$$\int_{-\infty}^{q_{0,5}} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x-m}{a}\right)\right]_{-\infty}^{q_{0,5}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{q_{0,5}-m}{a}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\arctan\left(\frac{q_{0,5}-m}{a}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left(\frac{q_{0,5}-m}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{q_{0,5}-m}{a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{q_{0,5} = m.}$$

2. Calcul de la fdr

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{t-m}{a}\right)\right]_{-\infty}^{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{x-m}{a}\right)+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-m}{a}\right)}$$

3. On cherche la loi de $\frac{X-m}{a}$.

Soit $Y = \frac{X-m}{a}$ $\qquad x \mapsto \frac{x-m}{a}$ croissante si $a>0$

$\forall y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P(Y\leq y) = P\left(\frac{X-m}{a}\leq y\right) \overset{a>0}{=} P(X-m \leq ay)$$

$$= P(X \leq ay+m)$$

$$= F_X(ay+m)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(ay+m)}{dy} = a f_X(ay+m)$$

d'où $$f_Y(y) = a \times \frac{a}{\pi(a^2+(ay+m-m)^2)} = \frac{a^2}{\pi(a^2+a^2y^2)} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

→ On retrouve bien la densité d'une $\mathcal{C}(0,1)$.

4- Soit $m=0$ et $a=1$.

Soit $\tilde{X} \sim C(0,1)$ $\quad f_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

On pose $Y = \frac{1}{\tilde{X}}$. Soit $y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

$P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{1}{\tilde{X}} \leqslant y\right) = P\left(\tilde{X} \geqslant \frac{1}{y}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{1}{y}\right)$

$$f_Y(y) = \frac{d\left(1 - F_{\tilde{X}}\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{dy} = -\left(\frac{-1}{y^2}\right) f_{\tilde{X}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^2} \times \frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}$$
$$= \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

CQFD

5- Quantile d'ordre p (pour $\tilde{X}$)

Soit $p \in]0,1[$ et q_p tq $P(X \leqslant q_p) = p = F_X(q_p)$

Alors q_p vérifie

$$F_X(q_p) = \int_{-\infty}^{q_p} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{q_p}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(q_p) + \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(q_p) = p$$

d'où $\quad \arctan(q_p) = \left(p - \frac{1}{2}\right)\pi$

$\Leftrightarrow \quad q_p = \tan\left(\pi\left(p - \frac{1}{2}\right)\right)$

Exercice 17

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ avec $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

* Soit $Y = X^2$ $\quad x \mapsto x^2$ non monotone

Soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y < 0$, $P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = 0$

Si $y \geqslant 0$

$$P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$$
$$= P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X \leqslant -\sqrt{y})$$
$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

d'où $$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + \underbrace{f_X(-\sqrt{y})}_{= f_X(\sqrt{y}) \text{ car } f_X \text{ paire}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})$$

i.e $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)}$

* Soit $Y = e^{X^2}$ $\quad x \mapsto e^{x^2}$ non monotone, positive, > 1

Soit $y \in \mathbb{R}$. Si $y \leqslant 1$, $P(Y \leqslant y) = P(e^{X^2} \leqslant y) = 0$

Si $y>1$

$$P(Y\leq y) = P(e^{X^2}\leq y) = P\left(X^2\leq \ln(y)\right) = P\left(-\sqrt{\ln y}\leq X\leq \sqrt{\ln y}\right)$$
$$= F_X(\sqrt{\ln y}) - F_X(-\sqrt{\ln y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2y\sqrt{\ln y}}\left(f_X(\sqrt{\ln y}) + f_X(-\sqrt{\ln y})\right) = \frac{1}{y\sqrt{\ln y}} f_X(\sqrt{\ln y})$$

$$(\sqrt{\ln y})' = \frac{1}{2y\sqrt{\ln y}}$$

i.e $$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi \ln y}}\, e^{-(\sqrt{\ln y})^2/2}$$
$$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi \ln y}}\, \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\ln y}}_{=\frac{1}{\sqrt{y}}}$$
$$= \frac{1}{y\sqrt{2\pi y \ln y}}\, \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(y)$$

Exercice 18

1 - Soit X de densité f_X et fdr F_X (strictement croissante)

On pose $Y = F_X(X)$, $y\in\mathbb{R}$ $\quad F_X \to$ à valeurs ds $[0,1]$

- Si $y<0$ $\quad P(F_X(X)\leq y) = 0 = F_Y(y)$
- Si $y>1$ $\quad P(Y\leq y) = P(F_X(X)\leq y) = 1 = F_Y(y)$
- Si $0\leq y\leq 1$ $\quad P(Y\leq y) = P(F_X(X)\leq y) \underset{F^{-1}\text{ croissante}}{=} P(X\leq F_X^{-1}(y))$

$$= F_X(F_X^{-1}(y)) = y = F_Y(y)$$

donc finalement
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ y & \text{si } 0\leq y\leq 1 \\ 1 & \text{si } y>1 \end{cases} \Bigg\}\ \text{fdr de } \mathcal{U}([0,1])$$

ie $F_X(X) \sim \mathcal{U}([0,1])$

2 - Y v.a.r de fdr F_Y et $U\sim\mathcal{U}([0,1])$

On pose $Z = F_Y^{-1}(U)$. Soit $z\in\mathbb{R}$

$$F_Z(z) = P(Z\leq z) = P(F_Y^{-1}(U)\leq z) = \underbrace{P(U\leq F_Y(z))}_{\text{fdr d'1 uniforme au point } F_Y(z)}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } F_Y(z)<0 \\ F_Y(z) \text{ si } 0\leq F_Y(z)\leq 1 \\ 1 \text{ si } F_Y(z)>1 \end{cases} \quad = F_Y(z) \text{ car } 0\leq F_Y(z)\leq 1\ \forall z$$

Donc Z a pr fdr F_Y donc suit bien la même loi que Y.

3. Si on sait simuler selon une loi uniforme des valeurs $u_1, \dots, u_n, \dots$
alors $\left(F_Y^{-1}(u_i)\right)_{i \in \mathbb{N}}$ sera distribuée selon la loi de Y.