

–EXAMEN–

- Année universitaire : 2022-2023
- Année d'étude : Licence MIA SHS 2e année
- Session : 1
- Semestre : 2
- Code Apogée de l'épreuve : 04FF422
- Enseignement : Statistique inférentielle – Introduction
- Etudiants : Assidus Dispensés hors CED CED
- Rédacteur du sujet : Benoît Cadre
- Calculatrice : Autorisée Non-autorisée
- Documents autorisés : aucun
- Durée de l'épreuve : 1h30
- Le sujet comporte 1 page

EXERCICE 1 – Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\{0, 1\}^n, \{\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}\}_{\theta \in]0, 1[})$ le modèle statistique du jeu de pile ou face, et $(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{B}(\theta)^{\otimes n}$ avec $\theta \in]0, 1[$ un échantillon. Le paramètre d'intérêt est θ .

1. Calculer un majorant indépendant de θ pour le risque quadratique de
 - (a) l'estimateur $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - (b) l'estimateur $\hat{\theta} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$.
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$.
 - (a) Construire un intervalle de confiance par excès pour θ au niveau de confiance $1 - \alpha$.
 - (b) A partir de quelle valeur de n (fonction de α) la longueur de l'intervalle de confiance est-elle inférieure à $1/100$?

EXERCICE 2 – On dispose d'un sac rempli de boules de couleurs rouge, bleu et vert. La proportion de boules rouges est inconnue. On répète n fois l'expérience aléatoire suivante : on compte le nombre de tirages avec remise nécessaires pour tirer une boule rouge.

1. Quel est l'espace des observations ?
2. Quel est le modèle statistique ? (le paramètre du modèle étant la proportion de boules rouges).
3. On considère que le paramètre d'intérêt est la proportion de boules rouges. On note (X_1, \dots, X_n) un échantillon du modèle statistique.
 - (a) Expliquer pourquoi $1/\bar{X}_n$ est un estimateur naturel de la proportion de boules rouges.
 - (b) Donner un majorant pour le biais de cet estimateur.
 - (c) Donner un majorant pour le risque quadratique de cet estimateur.

EXERCICE 3 – On note $\mathcal{U}(A)$ la loi uniforme sur l'ensemble $A \subset \mathbb{Z}$. Décrire une situation concrète modélisée par le modèle statistique $((\mathbb{N}^*)^n, \{\mathcal{U}(\{1, \dots, \ell\})^{\otimes n}\}_{\ell \in \mathbb{N}^*})$.