PROBABILITES 2

Benoit.cadre@univ-rennes.fr

CC1 : mardi après les vacances de février

CC2 : dernier CM

$$\text{Note} = \max\left(CC2, \frac{CC1+CC2}{2}\right)$$

CHAPITRE 1 : VARIABLES ALEATOIRES A DENSITE

1. Modélisation par des variables aléatoires réelles

On cherche à modéliser la durée de vie d'une ampoule. Il faut définir un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}_+ \text{ avec } \begin{cases} \Omega : \text{ensemble de toutes les conditions expérimentales} \\ \mathbb{R}_+ : \text{ensemble de toutes les durées de vie possibles de l'ampoule} \end{cases}$$

Avec ce formalisme, pour la condition expérimentale $\omega \in \Omega$, la durée de vie de l'ampoule est $X(\omega)$ heures.

Définition Une variable aléatoire réelle (var) X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Terminologie

- Ω = univers, i.e. l'ensemble des conditions expérimentales
- $\omega \in \Omega$ est une éventualité
- $A \subset \Omega$ est un événement
- Pour $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est une réalisation de X
- Pour tout $a \leq b$: $\{X \in [a, b]\} \overset{\text{déf}}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b]\}$

Problème (épineux) : Ω est inconnu. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ modélise la durée de vie d'une ampoule, on ne peut pas décrire X.

On se retranche vers une notion plus faible : la loi de probabilité de X.

Définition Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var. La loi de X est représentée par les probabilités $\mathbb{P}(X \in [a,b]) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\{X \in [a,b]\})$, $\forall a \leq b$ des réels.

On a donc affecté à l'univers Ω une probabilité $\mathbb{P}$. Elle vérifie (rappel) :

- $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ pour tout $A \subset \Omega$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si $A_1, A_2, \dots$ sont des évènements disjoints : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$
- $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ $\forall A \subset \Omega$

2. Lois à densité

Pour $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une var, comment décrire la loi de X ?

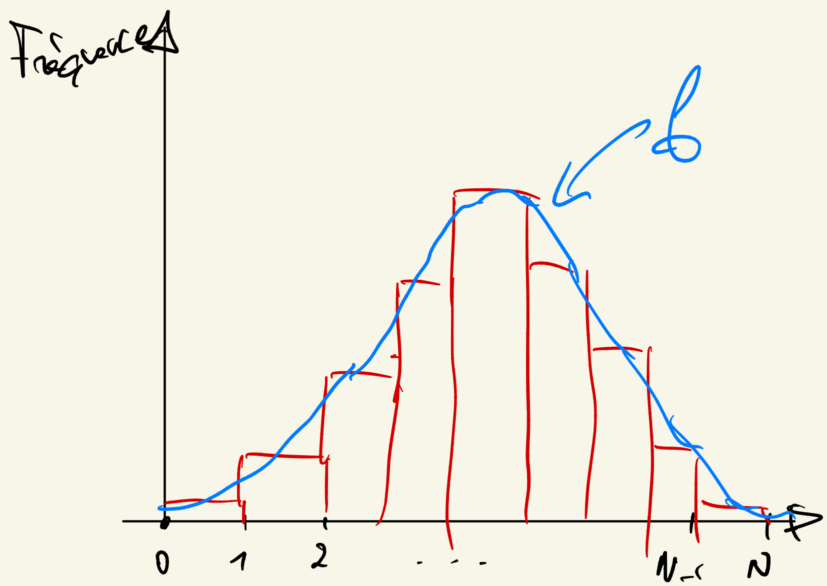
Avec $\mathbb{P}(X = x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$? Non.

La planche de Galton, cf site maths is fun

$N+1$ rangées de cases numérotées $0, 1, \dots, N$

X_N : la variable aléatoire qui donne le numéro de la case. X_N est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans $\{0, 1, \dots, N\}$:

$$X_N : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\} \quad \text{et} \quad X_N \sim \mathcal{B}(N, 1/2)$$



Pour les cases $a < b$

$$\mathbb{P}(X_N \in [a, b]) = \sum_{k=a}^{b} \mathbb{P}(X_N = k)$$

$\simeq$ fréquence du nb de boules tombées ds les cases a à b.

$$\simeq \int_a^b f(x)\, dx$$

Cela impose $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

Définition Une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée densité sur $\mathbb{R}$ si $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Terminologie Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction telle que

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$: c'est la fonction indicatrice de A.

Définition Une var X est dite de loi à densité si il existe une densité f_X sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ éventuellement infinis tels que $a \leq b$:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Ainsi, connaître la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à connaître la densité.

<u>Remarques</u> Soit X une var de densité f_X

① Pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X \in [a,a]) = \int_a^a f_X(x)\,dx = 0$

② De ce fait, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$:

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in]a,b[) = \mathbb{P}(X \in [a,b[) = \mathbb{P}(X \in]a,b])$$

③ $f_X = 0$ sur $\overline{[a,b]} = [a,b]^c \iff \mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$ i.e. X ne prend ses valeurs que dans $[a,b]$ car

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

En guise de conséquence, si X est une var à densité, alors la var $\frac{1}{X}$ existe avec proba. 1 car

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} \text{ n'existe pas}\right) = \mathbb{P}(X=0) = 0$$

3- Fonction de répartition

La loi de $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est décrite par les probabilités $\mathbb{P}(X\in[a,b])$, $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. Or, si X possède une densité :

$$\mathbb{P}(X\in[a,b]) = \mathbb{P}(X\leq b) - \mathbb{P}(X<a)$$

En effet,

$$\mathbb{P}(X<a) + \mathbb{P}(X\in[a,b]) = \mathbb{P}(\{X<a\}\cup\{X\in[a,b]\})$$

Rappel si $A,B\subset\Omega$ sont disjoints, $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cup B)$

car $\{X<a\}\cap\{X\in[a,b]\} = \emptyset$

Puis $\{X<a\}\cup\{X\in[a,b]\} = \{X\leq b\} \overset{\text{idem}}{=} \{X\in\,]-\infty, b]\}$

d'où $\mathbb{P}(X<a)+\mathbb{P}(X\in[a,b]) = \mathbb{P}(X\leq b)$.

Alors, $\mathbb{P}(X\in[a,b]) = \mathbb{P}(X\leq b) - \mathbb{P}(X<a) = \mathbb{P}(X\leq b) - \mathbb{P}(X\leq a)$ car X possède une densité.

Par suite, connaître la loi de $X \iff$ connaître la fonction $x\mapsto\mathbb{P}(X\leq x)$

Définition Une fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ s'appelle fonction de répartition (f.r.) si F est continue à droite, croissante et si

$$\lim_{-\infty} F = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} F = 1$$

Proposition Soit X une var à densité f_X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note F_X la fonction définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Alors F_X est une f.r., appelée f.r. de X et $F_X' = f_X$ en tout point où F_X est dérivable.