Statistique Inférentielle - Introduction

benoit.cadre@univ-rennes2.fr

CHAPITRE 1 : RAPPELS DE PROBABILITES DISCRETES

1- Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience : on lance une pièce et on note le résultat, soit pile ou face. C'est une expérience aléatoire, au sens où on ne peut pas prédire l'issue.

Pour modéliser l'expérience, on introduit la fonction

$$X : \Omega \to \{0,1\} \quad \text{avec} \begin{cases} 1 = \text{codage de pile} \\ 0 = \text{" " face} \end{cases}$$

avec Ω, l'univers, qui représente l'ensemble des conditions expérimentales.

Notez que Ω est inconnu, dans le sens où on ne peut pas le décrire de manière exhaustive.

Conséquence : on ne peut pas décrire X.

<u>Définition</u> Une variable aléatoire discrète est une fonction $X : \Omega \to D$, où D est un ensemble discret ($D = \mathbb{Z}^d$, $D = \mathbb{N}^d$, $D = \{0,1\}$ etc).

Une réalisation de la variable aléatoire discrète (vad) à valeurs dans D est un $X(\omega)$, pour $\omega \in \Omega$.

<u>Définition</u> Soit X une vad à valeurs dans D. La loi de X est caractérisée par les probabilités $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in D$.

Ici, $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, et le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ s'appelle espace probabilisé. On rappelle que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω si :

1. Pour tout $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
3. Pour toute suite $(A_n)_n$ disjointe, $A_n \subset \Omega$ $\forall n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

Revenons-en au lancer de pièce, modélisé par la vad $X : \Omega \to \{0,1\}$. Supposons que la pièce est équilibrée. La loi de X est décrite par $\mathbb{P}(X=x)$, $\forall x \in \{0,1\}$. Ici, $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

2- Lois discrètes usuelles

Pour indiquer que la vad X suit la loi $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$.

(1) Loi uniforme sur $A \subset \mathbb{Z}^d$ (fini), notée $\mathcal{U}(A)$. On a $X \sim \mathcal{U}(A)$ si

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{\mathrm{Card}(A)} \quad \forall x \in A$$

Par exemple, le lancer d'une pièce équilibrée.

(2) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(p)$. On a $X \sim \mathcal{B}(p)$ si

$$\mathbb{P}(X=1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Notez que X est à valeurs dans $\{0,1\}$. Par exemple, le lancer d'une pièce, éventuellement non équilibrée.

③ **Loi binomiale** de paramètres (n, p) avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$. On a $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x \in \{0, \dots, n\}.$$

Notons que X est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Dans le cadre de répétitions (n fois) indépendantes d'une expérience de Bernoulli, cette loi modélise le comptage du nombre de succès. Par exemple, on lance n fois une pièce, et on compte le nombre de pile obtenus.

④ **Loi géométrique** de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$. On a $X \sim \mathcal{G}(p)$ si

$$\mathbb{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

X est donc à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Dans le cadre de la répétition d'expériences de Bernoulli, cette loi modélise le rang du 1er succès.

⑤ Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$. On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}.$$

X est donc à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cette loi modélise les évènements rares, cf chapitre 2.

3 - Espérance

Pour X une vad à valeurs dans D. La moyenne ou espérance $\mathbb{E}(X)$ est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D} x \, \mathbb{P}(X = x),$$

sous réserve de convergence absolue de la série (implicite dorénavant).

Théorème de transfert Soit X une vad à valeurs dans D et $g: D \to \mathbb{R}$.
Alors (sous réserve de convergence absolue de la série), l'espérance de la vad $g(X)$ vaut

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in D} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Propriétés

① Si X_1 et X_2 sont telles que $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2)$

② Si X_1 et X_2 sont des vad et $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2) \quad \text{(linéarité)}$$

③ Si X est une vad, $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

La variance de la vad X, notée $\mathrm{Var}(X)$, mesure l'écart quadratique des valeurs prises par X par rapport à sa moyenne :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right)$$

En pratique, pour calculer $Var(X)$, on utilise :

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$ Formule de Koenig.

On note la formule de translation-homothétie :

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Quelques résultats qu'il est bon de connaître

Loi	MOYENNE	VARIANCE
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

4. Indépendance

Les vad $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans D sont indépendantes si, pour tout $I \subset \{1, \dots, n\}$ et tout $x_i \in D$, $i \in I$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = x_i\} \right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Notez que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes, avec $g_i : D \to \mathbb{R}$. De plus, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes :

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \cdots \mathbb{E}(X_n)$$

et $$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)$$

5- quelques résultats incontournables

Théorème Soient $a>0$ et X une vad. Alors :

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} \quad \text{(Inégalité de Markov)}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev)}$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si X_1 et X_2 sont des vad, alors

$$\mathbb{E}(X_1 X_2)^2 \leq \mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}(X_2^2)$$

Théorème (Loi des grands nombres) Soient $X_1, X_2, \ldots$ des vad indépendantes et de même loi. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_1)\right|\right) = 0$$