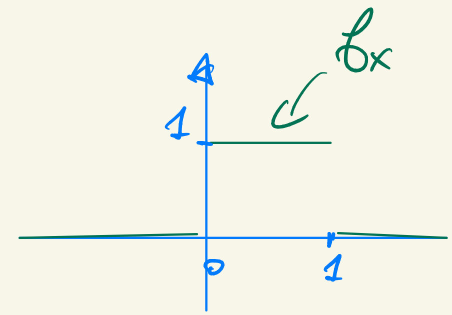
Théorème Soit F une f.r. dérivable, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si sa dérivée F' est une densité, alors c'est la densité d'une v.a.r. et F est donc la f.r. d'une v.a.r. à densité.

Exemple Ce théorème fournit une méthode pour calculer la densité d'une v.a.r. transformée. Par exemple, si X est une v.a.r. de densité

$$f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

Comment calculer la loi de la v.a.r. $2X$? Calculons la f.r. de la var $2X$:



$$F_{2X}(x) = \mathbb{P}(2X \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x}{2}\right) = \int_{-\infty}^{x/2} f_X(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x/2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \\ \displaystyle\int_0^{x/2} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\,dt = \frac{x}{2} & \text{si } x \in [0,2] \end{cases}$$

F_{2X} est dérivable partout sauf en 0 et 2, de dérivée $F'_{2X}(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2[}(x)$

Or $F'_{2X}(x) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,2[}(x)$ est bien une densité, c'est donc la densité de la var $2X$.

d'après le théorème précédent.

4. Méthode de calcul des densités

Pour une v.a.r. X de densité f_X et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, comment calculer la densité (i.e. la loi) de la v.a.r. $\varphi(X)$? On vient de voir qu'il suffit de calculer la f.r. de $\varphi(X)$, notée $F_{\varphi(X)}$; si $F'_{\varphi(X)}$ est une densité, alors c'est la densité de la v.a.r. $\varphi(X)$.

On a une expression simple lorsque φ est strictement monotone

Théorème Soit X une v.a.r. et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle (éventuellement infini) tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$. Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si X possède une densité f_X, alors $\varphi(X)$ possède une densité qui est :

$$f_{\varphi(X)}(x) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(x))|} f_X(\varphi^{-1}(x))$$

φ^{-1} = réciproque de φ.

Exemple X de densité $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Calculer la loi de X^2.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$

Ici, $I = [0,1]$ car $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$. De plus, $\varphi(x) = x^2$ et φ est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0,1]$. On peut donc utiliser le théorème.

On a $\varphi'(x) = 2x$. Pour calculer φ^{-1}, on pose $\varphi(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ pour $x, y \in [0,1]$. D'où $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Alors :

$$f_{X^2}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{|2\varphi^{-1}(y)|} f_X(\varphi^{-1}(y))$$

$$= \frac{1}{|2\sqrt{y}|} \mathbb{1}_{[0,1]}(\sqrt{y})$$

$\sqrt{y} \in [0,1] \Leftrightarrow y \in [0,1]$

$\Rightarrow \mathbb{1}_{[0,1]}(\sqrt{y}) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

Lorsque φ n'est pas strictement monotone, on ne peut pas appliquer le théo !
Dans ce cas, on traite au cas par cas ! On procède par exemple

comme suit. Soit X une var de densité $f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ et on veut calculer la densité de la var X^2.

$\Rightarrow \mathbb{P}(X\in[-1,1])=1$

Ici, $I=[-1,1]$ car $\mathbb{P}(X\in[-1,1])=1$ et $\varphi(x)=x^2$. Or φ n'est pas strictement monotone sur $[-1,1]$ donc on ne peut pas appliquer le théorème précédent !

On revient sur la méthode des f.r. Calculons la f.r. de la var X^2.

$F_{X^2}(x)=\mathbb{P}(X^2\le x)$. On a $F_{X^2}(x)=0$ si $x<0$. De plus, $\mathbb{P}(X\in[-1,1])=1$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X^2\in[0,1])=1 \Rightarrow F_{X^2}(x)=1$ si $x>1$. Enfin, si $x\in[0,1]$:

$$F_{X^2}(x)=\mathbb{P}(X^2\le x)=\mathbb{P}(-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x})$$

$$=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f_X(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \underbrace{\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)}_{=1 \text{ car } t\in[-\sqrt{x},\sqrt{x}]\subset[-1,1]}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dt=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x}$$

$$=\sqrt{x}$$

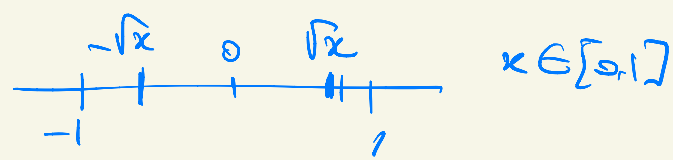
Rappel Pour $x\ge 0$,

$a^2\le x$

$\iff -\sqrt{x}\le a\le\sqrt{x}$

$-1\le a\le 1$

$\iff 0\le a^2\le 1$



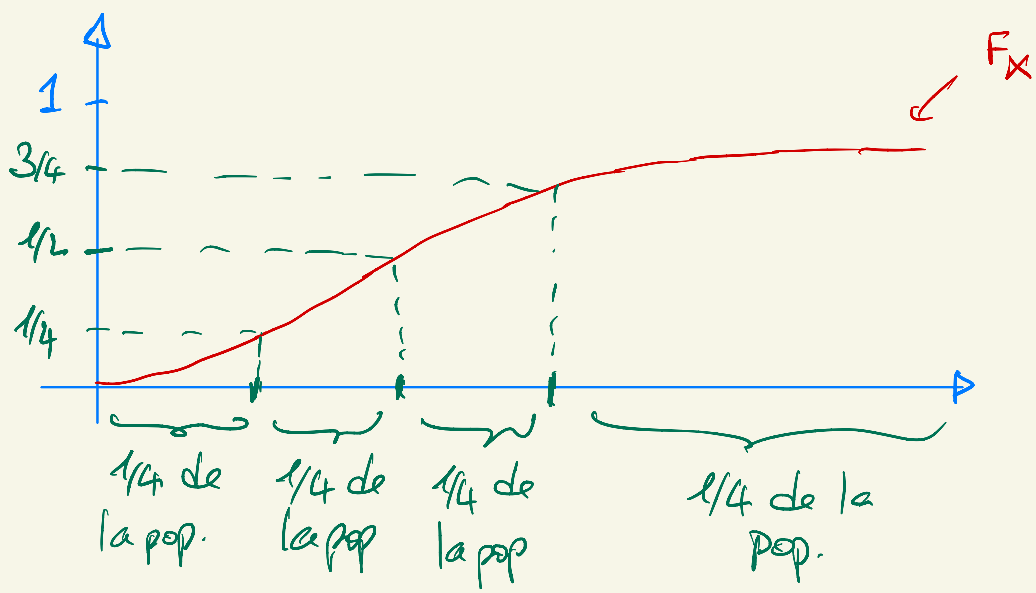
Donc $F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Or F'_{X^2} est bien une densité car $F'_{X^2} \geq 0$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} F'_{X^2}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = [\sqrt{x}]_0^1 = 1.$

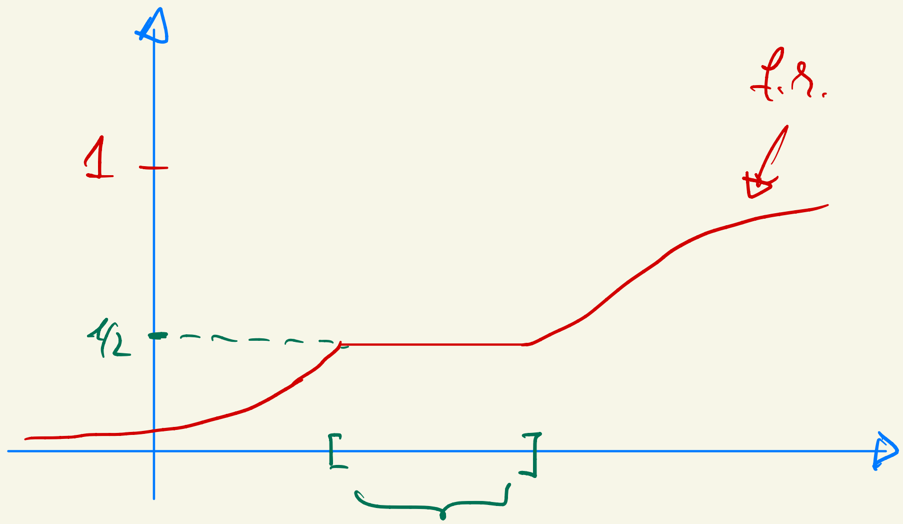
Par suite, F'_{X^2} est la densité de X^2.

5. Quantiles

X v.a.r. qui modélise le poids des patients. On trace la f.r. :



"Quartile"



ensemble médian : pas unicité de la médiane !

Convention : "la médiane" est la + petite borne de l'intervalle médian.

Définition Soit X une v.a.r. de f.r. F_X. Le quantile d'ordre $p \in]0,1[$ de X est défini par

$$Q(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) = p\}$$

Lorsque F_X est strictement croissante, $Q(p)$ est le seul réel tel que $F_X(Q(p)) = p$

$\Leftrightarrow Q(p) = F_X^{-1}(p)$.

Terminologie Lorsque $p = \frac{k}{n}$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et

$\rightarrow n = 3$: $Q\left(\frac{k}{3}\right)$ est le k-ème tercile

$\rightarrow n = 4$: $Q\left(\frac{k}{4}\right)$ est le k-ème quartile

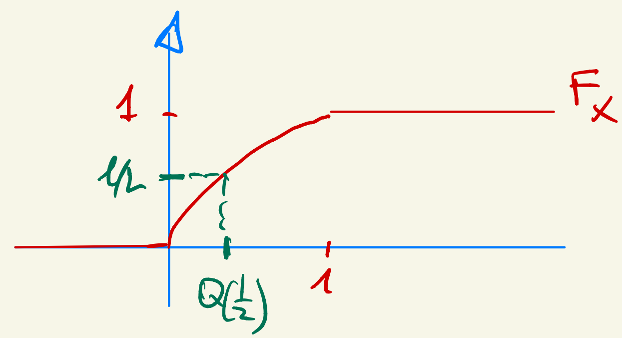
$\rightarrow n = 10$: $Q\left(\frac{k}{10}\right)$ est le k-ème décile

etc.

Si $p = \frac{1}{2}$, $\boxed{Q\left(\frac{1}{2}\right) \text{ est la médiane.}}$

Exemple X de densité $f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x)$. Calculer la médiane de X.

On a vu que $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$



On a forcément $Q\left(\frac{1}{2}\right) \in [0,1]$, donc

$$F_X\left(Q\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\parallel$$

$$\sqrt{Q\left(\tfrac{1}{2}\right)}$$

car $Q\left(\frac{1}{2}\right) \in]0,1[$

$$\Rightarrow Q\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$