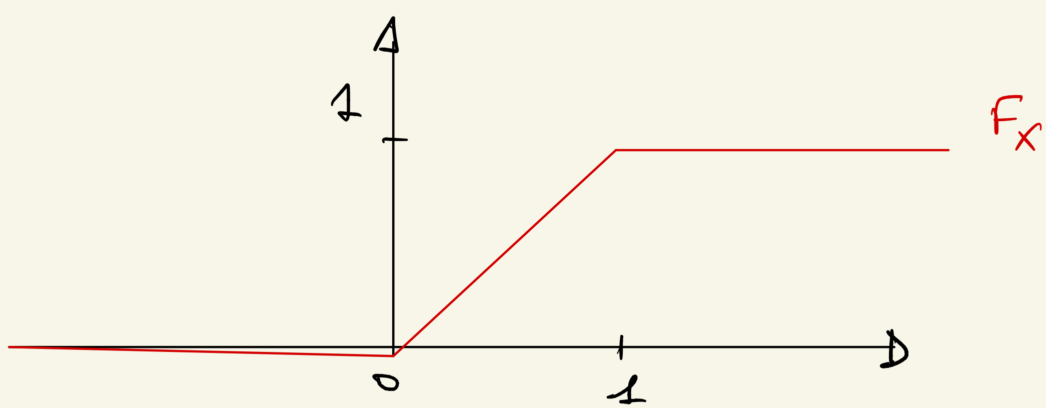
CHAPITRE 2 : LOIS À DENSITÉ USUELLES

1. Loi uniforme

Modélisation On lance, au hasard, une bille sur une planche de longueur 1. On note X la v.a. qui modélise l'abscisse de la bille sur la planche. On a $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = 1$. De plus, $\forall\ 0 \leq u \leq v \leq 1$, $\mathbb{P}(X \in [u,v]) = v - u$. On peut en déduire la f.r. de X :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall x < 0 : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0 \\ \bullet\ \forall x \geq 1 : F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 \\ \bullet\ \forall x \in [0,1[: F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in [0,x]) = x \end{cases}$$



Rappel : Si F'_X est une densité, alors c'est la densité de X.

On a $F'_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x \in [0,1[\end{cases} = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$: cette fonction est bien une densité, c'est donc la densité de la v.a. X.

Loi uniforme La loi modélise des situations d'uniformité

Définition Soient $a < b$ des réels. La densité uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ est la fonction

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Une v.a.r. X suit la loi uniforme sur $[a,b]$ si ~~sa~~ densité est f, et on note $\boxed{X \sim \mathcal{U}([a,b])}$

2 - Loi exponentielle

Modélisation On veut modéliser un phénomène qui évolue dans le temps, et qui est "sans mémoire". C'est le cas pour la durée de vie d'une ampoule, le temps entre 2 désintégrations de l'uranium, le délai entre 2 tremblements de terre etc. Ce qui caractérise ces situations, c'est qu'une var X qui modélise ces délais "ne se souvient pas d'avoir vieilli".

Alors, $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ et

$$\mathbb{P}(X > x+y \mid X > y) = \mathbb{P}(X > x) \quad \forall x, y \geq 0.$$

Rappel Si A, B sont des évènements, et $\mathbb{P}(B) \neq 0$:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Proba de A sachant B.

Examinons cette équation. Comme $x \geq 0$, on a

$$\{X > x+y\} \subset \{X > y\} \quad \text{car } X > x+y \Rightarrow X > y.$$

Donc $\{X > x+y\} \cap \{X > y\} = \{X > x+y\}$. et ainsi

$$\mathbb{P}(X > x+y \mid X > y) = \frac{\mathbb{P}(\{X > x+y\} \cap \{X > y\})}{\mathbb{P}(X > y)} = \frac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X > y)}$$

On a trouvé $\mathbb{P}(X>x+y)=\mathbb{P}(X>x)\,\mathbb{P}(X>y)$ $\forall x,y\geq 0$. Si on note $\varphi(x)=\mathbb{P}(X>x)$, on a donc

$$\boxed{\varphi(x+y)=\varphi(x)\,\varphi(y) \quad \forall x,y\geq 0}$$

C'est l'équation fonctionnelle de Cauchy.

D'après Cauchy, il existe $\lambda\geq 0$ tel que $\varphi(x)=e^{-\lambda x}$ $\forall x\geq 0$. Donc

$$F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)=1-\mathbb{P}(X>x)=1-\varphi(x)=1-e^{-\lambda x},\ \forall x\geq 0$$

et on sait $F_X(x)=0$ $\forall x<0$. Donc

$$F_X'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}=\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

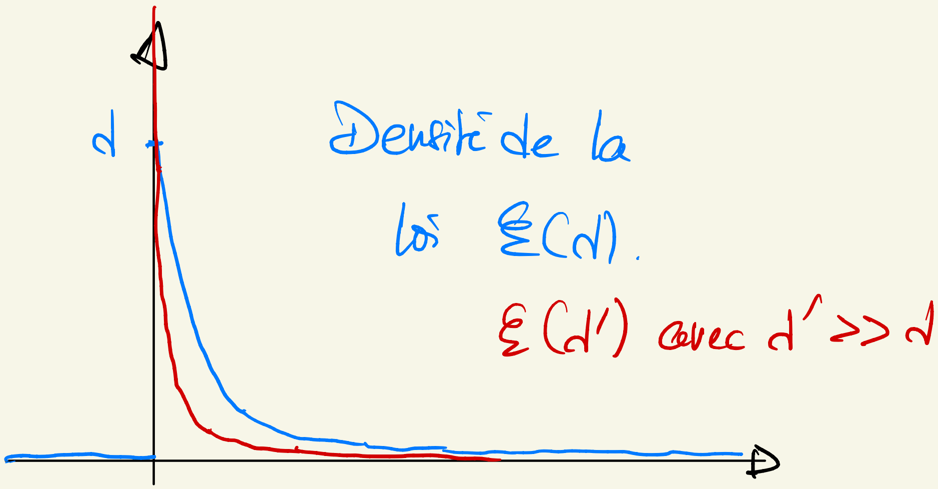
: c'est une densité (si $\lambda>0$) donc c'est la densité de X !

Loi exponentielle

Définition Soit $\lambda>0$. La densité exponentielle de paramètre λ est la fonction

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Une var X suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité est f, et $\boxed{X\sim\mathcal{E}(\lambda)}$

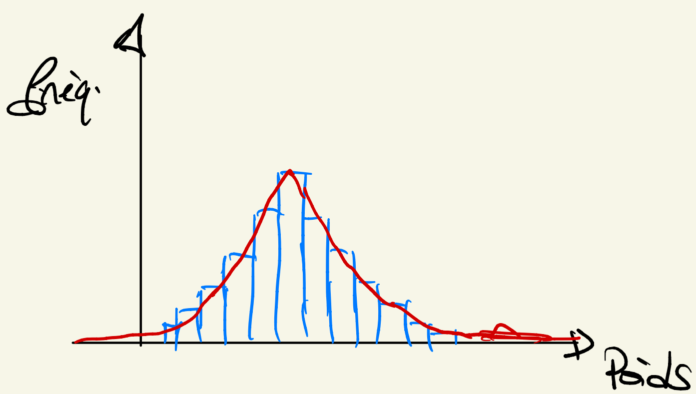


Plus λ est grand, plus la densité "s'écrase" au niveau de l'axe des ordonnées et donc plus $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ aura tendance à prendre des valeurs proches de 0.

On peut aussi le voir avec la f.r. : si $x \geq 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \underset{(\lambda \text{ gd})}{\nearrow} 1$

3- Loi normale

Modélisation On note X le poids des nourrissons et on forme l'histogramme de leurs poids.



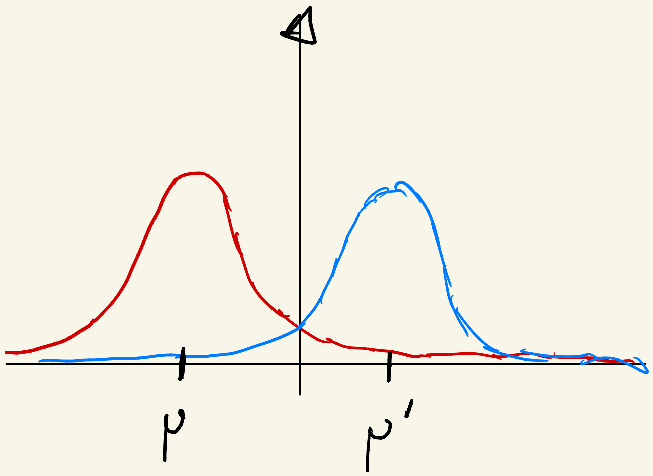
À une constante multiplicative près, la courbe rouge est de la forme $x \mapsto e^{-a(x-m)^2}$

Loi normale ou loi de gauss

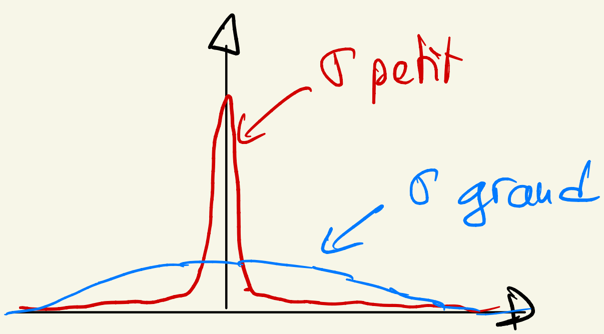
On peut montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad (\sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}).$$

est une densité (à voir dans le cours d'Analyse).



μ est un paramètre de position



σ est un paramètre de forme (ou d'échelle).

Définition Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La densité gaussienne, ou normale, de paramètres μ et σ^2 est la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Une var X suit la loi gaussienne, ou normale, si sa densité est f, et on note $\boxed{X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}$

Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt$. Mais on rappelle qu'il n'existe pas de primitive à la fonction de gauss qui puisse s'exprimer avec les fonctions usuelles, donc on ne peut pas calculer F_X.

Proposition Si Φ est la f.r. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Preuve $$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{“}t=-\infty\text{”}}^{\text{“}t=-x\text{”}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\text{“}u=+\infty\text{”}}^{\text{“}u=x\text{”}} e^{-\frac{(-u)^2}{2}} \times (-du)$$

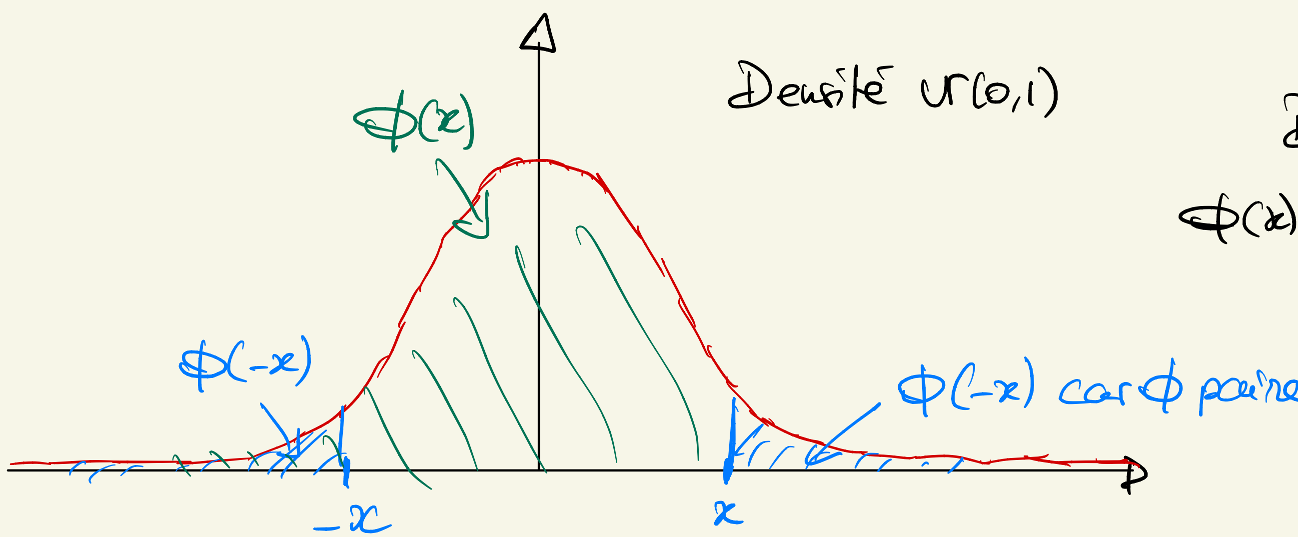
Changement de variable $u = -t$ (ok car str. monotone et $\mathcal{C}^1$) et $du = -dt$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \qquad -\int_{+\infty}^{x} = \int_{x}^{+\infty}$$

Chasles

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du - \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}_{=1,\text{ car intégrale de la densité } \mathcal{N}(0,1)} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}_{=\Phi(x)}$$

$$= 1 - \Phi(x)$$



Donc

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$$