Rappel : • CC 1 le mercredi 6 mars, 8h30 – 10h

• Au programme : tout ce qui aura été vu à cette date

• Le sujet comportera un exercice de la feuille TD 1 résolu en séance de TD

• Il y aura 1 ou 2 calculs simples d'espérance (cours d'aujourd'hui)

Théorème Soient $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors $aX+b \sim \mathcal{N}(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

En particulier, si $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, on trouve

$$\boxed{\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

Preuve On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$. Si on pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b \end{cases}$, alors φ est $\mathcal{C}^1$ et bijective. On a $\varphi'(x) = a$ et pour calculer φ^{-1}, on résout $y = \varphi(x)$

$\iff y = ax+b \iff x = \frac{y-b}{a}$ d'où $\varphi^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$

Donc $$f_{\varphi(X)}(y) = \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\varphi^{-1}(y)-\mu)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(a\sigma)^2}\left(y-(a\mu+b)\right)^2\right)$$

qui est la densité de la loi $\mathcal{N}(a\mu+b, (a\sigma)^2)$, donc

$$\boxed{aX+b = \varphi(X) \sim \mathcal{N}(a\mu+b, (a\sigma)^2)}$$

CHAPITRE 3 : ESPERANCE

Introduit par Christian Huygens (17^e siècle). Pour loi, l'espérance désigne une notion de gain espéré dans les jeux de hasard.

1. Moyenne d'une v.a.r.

Si Z est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, la moyenne ou espérance de Z est définie par la relation

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \, \mathbb{P}(Z = k)$$, sous réserve de convergence absolue.

Lorsque X est une v.a.r. à densité, cette formule n'a pas de sens. Mais elle nous guide vers une formule du type :

$$\text{“} \; \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathbb{P}(X \in [x, x + dx]) \; \text{”}$$

Or, $$\text{“} \; \mathbb{P}(X \in [x, x + dx]) = \int_x^{x+dx} f_X(t) \, dt = f_X(x) \, dx \; \text{”}$$

De ce fait, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$.

<u>**Définition**</u> Soit X une var de densité f_X. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$, on dit que X est intégrable et dans ce cas, on appelle espérance ou moyenne de X la quantité $\mathbb{E}(X)$ définie par

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx}$$

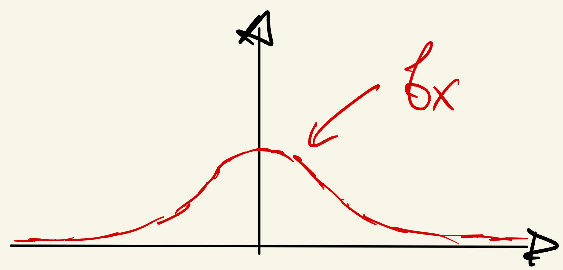
La quantité $\mathbb{E}(X)$ donne la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par sa loi.

<u>Exemples</u>

- Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. On devrait avoir $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$. Est-ce cohérent avec la formule ?

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ : ok !}$$

- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, de densité $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



On s'attend à ce que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Par le calcul : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Comme $x f_X(x)$ est impaire, on a par le rappel :

Rappel : si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 0$

$$\mathbb{E}(X) = 0.$$

Ou bien, calculons l'intégrale :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -\frac{2x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}_{=0} \right)$$

$$= 0.$$

- Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ de densité $f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} dx = \Big[\underbrace{x}_{u(x)} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{u'(x)} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v(x)} dx$$

Rappel (IPP)

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} (-x e^{-x})}_{=0} - 0 + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} (-e^{-x}) - (-e^0)$$

$$= 1.$$

Proposition Soit X une v.a.r. à densité telle que $\exists M \geq 0$ vérifiant $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$.

Alors X est intégrable

Preuve Comme $\mathbb{P}(X \in [-M, M]) = 1$, on sait que $f_X(x) = 0$ si $|x| > M$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\, dx \underset{\substack{\text{car } f_X = 0 \\ \text{sur } [-M;M]}}{=} \int_{-M}^{M} \underbrace{|x|}_{\leq M} f_X(x)\, dx \leq \int_{-M}^{M} M f_X(x)\, dx = M \underbrace{\int_{-M}^{M} f_X(x)\, dx}_{\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\, dx \leq M < \infty \Rightarrow X$ est intégrable.

2- Espérance de var transformées

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et Z est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors

$$\mathbb{E}(g(Z)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \, \mathbb{P}(Z = k) \qquad \text{(th. de transfert)}.$$

Par analogie, si X possède une densité f_X :

$$\text{“} \; \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, \mathbb{P}(X \in [x, x+dx]) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \, dx \; \text{”}$$

Théorème (de transfert) Soit X une var de densité f_X et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x) \, dx < \infty$, on dit que la var $g(X)$ est intégrable et, dans ce cas, la moyenne ou espérance de $g(X)$ est

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) \, dx}$$

Notez que $g(X)$ n'a pas forcément de densité (prendre par ex. $g(x)=1$, alors $\mathbb{P}(g(X)=1)=1\neq 0$ donc $g(X)$ n'a pas de densité). On est donc en mesure de calculer l'espérance d'une v.a. qui ne possède pas de densité, mais il faut quand même qu'elle s'écrive sous la forme $g(X)$ avec X à densité.

Proposition Soit X une v.a.r. intégrable et $a, b\in\mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\mathbb{E}(aX+b)=a\,\mathbb{E}(X)+b}$$

Exemples

- Soit $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

  On a vu que si $N\sim\mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(N)=0$. On sait que $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$ (cf chapitre 2). Alors $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N \Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\mathbb{E}(N)=0$

  D'où par la proposition, $\frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X)-\mu)=0 \iff \boxed{\mathbb{E}(X)=\mu}$

Donc le paramètre μ de la loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ est son espérance

- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda>0)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

On a vu que si $N \sim \mathcal{E}(1)$, alors $\mathbb{E}(N)=1$. On peut montrer que $\lambda X \sim \mathcal{E}(1)$.

En effet, posons $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \lambda x \end{cases}$. On a $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}_+)=1$ et φ est bijective et C^1.

Puis $\varphi'(x)=\lambda$ et on calcule φ^{-1} en écrivant $y=\varphi(x) \iff y=\lambda x \iff x=\frac{y}{\lambda}$

d'où $\varphi^{-1}(y)=\frac{y}{\lambda}$. Alors,

$$f_{\varphi(X)}(y)=\frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} f_X(\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cancel{\lambda} e^{-\lambda \varphi^{-1}(y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(\varphi^{-1}(y))$$

$$= e^{-\lambda \frac{y}{\lambda}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = e^{-y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \text{ : densité de la loi } \mathcal{E}(1)$$

D'où $\boxed{\lambda X = \varphi(X) \sim \mathcal{E}(1).}$ Alors $\lambda X \sim N \Rightarrow \mathbb{E}(\lambda X)=\mathbb{E}(N)=1$

Donc par la proposition $\lambda \mathbb{E}(X)=1 \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{1}{\lambda}}$