Exercice 3

3a) $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq k<\ell} \{X=k, Y=\ell\}\right) = \sum_{1\leq k<\ell} \mathbb{P}(X=k, Y=\ell)$

$= \sum_{1\leq k<\ell} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)$ car X et Y sont indépendants

$= \sum_{1\leq k<\ell} (1-\theta)^{k-1}\theta(1-\theta)^{\ell-1}\theta$ car $X, Y \sim \mathcal{G}(\theta)$

$= \theta^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{\ell\geq k+1} (1-\theta)^{k-1}(1-\theta)^{\ell-1}$

$= \theta^2 \sum_{k\geq 1} (1-\theta)^{k-1} \sum_{\ell\geq k+1} (1-\theta)^{\ell-1}$

$= \theta^2 \sum_{k\geq 1} (1-\theta)^{k-1} \underbrace{\sum_{i\geq k} (1-\theta)^{i}}_{= (1-\theta)^k \frac{1}{1-(1-\theta)}}$ $(i = \ell-1)$

par le rappel

Rappel si $|a|<1$,

$$\sum_{i\geq 0} a^i = \frac{1}{1-a}$$

si $k\geq 0$:

$$\sum_{i\geq k} a^i = \sum_{i\geq k} a^{i-k} a^k$$

$$= a^k \sum_{i\geq k} a^{i-k}$$

$$= a^k \sum_{\ell\geq 0} a^\ell \quad (\ell = i-k)$$

$$= \theta^2 \sum_{k\geq 1} (1-\theta)^{k-1} \frac{(1-\theta)^k}{\theta} = \theta \sum_{k\geq 1} (1-\theta)^{2k-1} = \theta \sum_{k\geq 1} \frac{(1-\theta)^{2k}}{1-\theta}$$

$$= \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{k\geq 1} \left((1-\theta)^2\right)^k = \frac{\theta}{\cancel{1-\theta}} (1-\theta)^{\cancel{2}} \frac{1}{1-(1-\theta)^2}$$ par le rappel.

Rappel si $|a|<1$

$$\sum_{k\geq \ell} a^k = a^\ell \frac{1}{1-a}$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{1-(1+\theta^2-2\theta)} = \frac{\theta(1-\theta)}{\cancel{1}-\cancel{1}-\theta^2+2\theta} = \frac{\theta(1-\theta)}{2\theta-\theta^2}$$

$$= \frac{\cancel{\theta}(1-\theta)}{\cancel{\theta}(2-\theta)} = \frac{1-\theta}{2-\theta}$$

3(a)) Loi de $X+Y$? Comme $X\geq 1$ et $Y\geq 1$, la v.a. $X+Y$ prend ses valeurs dans $\{2,3,\dots\}$. Il suffit donc de calculer $\mathbb{P}(X+Y=k)$, $\forall k\geq 2$.

Soit $k\geq 2$. $X+Y=k \iff \underbrace{\text{il existe}}_{\to \bigcup_{i\geq 1}}$ $i\geq 1$ tel que $X=i$ $\underbrace{\text{et}}_{\to \bigcap}$ $Y=k-i$

réunion disjointe

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\geq 1}\big(\{X=i\}\cap\{Y=k-i\}\big)\Big) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i)$$ car réunion disjointe.

$= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$ car X et Y sont indépendantes.

Or, $\mathbb{P}(Y=k-i)=0$ si $k-i \leq 0$ car $Y \geq 1$: $\mathbb{P}(Y=k-i)=0$ si $i \geq k$. Donc

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$$

$j \geq 1$: $\mathbb{P}(X=j) = (1-\theta)^{j-1}\theta$.

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^{\cancel{i}-1}\theta \, (1-\theta)^{k-\cancel{i}-1}\theta \quad \text{car } X, Y \sim \mathcal{G}(\theta).$$

$$= \theta^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^{-1+k-1} = \theta^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^{k-2}$$

$$= \theta^2 (k-1)(1-\theta)^{k-2}$$

Exercice 5

en cours

① $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{B}(\theta)$. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a vu que $\theta = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$

Soit $a>0$. $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) = \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq a) \leq \dfrac{var(\bar{X}_n)}{a^2}$ par BT

On a vu en cours que $var(\bar{X}_n) = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$, d'où :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) \leq \frac{\theta(1-\theta)}{na^2}$$

Or, $\forall \theta \in [0,1]$: $\theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$ (vu en cours), d'où

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) \leq \frac{1}{4na^2} \iff 1 - \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| < a) \leq \frac{1}{4na^2}$$

$$\iff \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| < a) \geq 1 - \frac{1}{4na^2}$$

$$\iff \mathbb{P}(-a < \theta - \bar{X}_n < a) \geq 1 - \frac{1}{4na^2}$$

$$\iff \mathbb{P}(\bar{X}_n - a < \theta < \bar{X}_n + a) \geq 1 - \frac{1}{4na^2}$$

$$\iff \boxed{\mathbb{P}(\theta \in]\bar{X}_n - a, \bar{X}_n + a[) \geq 1 - \frac{1}{4na^2}}$$

Rappel

$|x| < a$

$\iff -a < x < a$

2. On cherche un intervalle dans lequel se trouve la proba que la pièce tombe sur pile avec un "niveau de confiance" $\geq 90\%$.

On cherche $a>0$ tel que $1-\frac{1}{4\times 10000\times a^2}=0,9 \iff a=\frac{1}{\sqrt{4000}}$

On note $a_0=\frac{1}{\sqrt{4000}}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\theta\in \left]\bar{X}_{10000}-a_0,\bar{X}_{10000}+a_0\right[\right)\geq 0,9$$

Notons $x_1,\dots,x_{10000}$ les résultats du lancer de pièce, avec

$x_i=\begin{cases}1 \text{ si ième lancer donne pile}\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$. Les observations $x_1,\dots,x_{10000}$ sont

des réalisations de vaiid $X_1,\dots,X_{10000}$ de même loi $\mathcal{B}(\theta^*)$, avec $\theta^*=$ proba que la pièce tombe sur pile. On a vu que

$$\mathbb{P}\left(\theta^*\in \left]\bar{X}_{10000}-a_0,\bar{X}_{10000}+a_0\right[\right)\geq 0,9$$

Donc, $\theta^*\in \left]\underset{\substack{\shortparallel\\0,2}}{\bar{x}_{10000}}-\underset{\substack{\shortparallel\\0,015}}{a_0},\underset{\substack{\shortparallel\\0,2}}{\bar{x}_{10000}}+\underset{\substack{\shortparallel\\0,015}}{a_0}\right[$ avec un niveau de confiance $\geq 0,9$.

$\Rightarrow \theta^*\in \left]0,185;0,215\right[$ avec un niveau de confiance $\geq 0,9$.

③ Soit $a>0$. Si $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{B}(\theta)$.

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) = \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geq a\right) \quad \text{car } \theta = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$$

$$= \mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right| \geq na\right)$$

Or, $\mathbb{P}(0 \leq X_i \leq 1) = 1$, donc par l'inégalité de Hoeffding :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{2(na)^2}{n(1-0)^2}\right) = 2e^{-2na^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| < a) \leq 2e^{-2na^2} \Leftrightarrow \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| < a) \geq 1 - 2e^{-2na^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbb{P}\left(\theta \in \left]\bar{X}_n - a, \bar{X}_n + a\right[\right) \geq 1 - 2e^{-2na^2}}$$

On a $n = 10\,000$. On cherche a t.q. $1 - 2e^{-2 \times 10000\, a^2} = 0{,}90$

$$\Leftrightarrow 2e^{-20\,000 a^2} = 0{,}1 \Leftrightarrow e^{-20\,000 a^2} = 0{,}05 \Leftrightarrow -20\,000 a^2 = \ln(0{,}05)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{\ln(0{,}05)}{-20\,000} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{\ln(0{,}05)}{-20\,000}}$$. On note $a_1 = \sqrt{\frac{\ln(0{,}05)}{-10\,000}}$

Ainsi $\mathbb{P}\left(\theta \in \left]\overline{X}_{10000} - a_1, \overline{X}_{10000} + a_1\right[\right) \geq 0{,}9$.

On a les résultats $x_1, \dots, x_{10000} \in \{0,1\}$ et on sait que $\overline{x}_{10000} = 0{,}2$.

Les observations $x_1, \dots, x_{10000}$ sont des réalisations de la loi $\mathcal{B}(\theta^*)$, avec θ^* la proba que la pièce tombe sur pile. Alors,

$$\theta^* \in \left] \underset{0{,}2}{\underset{\parallel}{\overline{x}_{10000}}} - \underset{0{,}012}{\underset{\parallel}{a_1}}, \underset{0{,}2}{\underset{\parallel}{\overline{x}_{10000}}} + \underset{0{,}012}{\underset{\parallel}{a_1}} \right[\quad \text{avec un niveau de confiance} \geq 0{,}9.$$

$$\Leftrightarrow \theta^* \in \left]0{,}188 ; 0{,}212\right[\text{ avec un niveau de confiance} \geq 0{,}9.$$