Rappel : Théo. de transfert

Si X est une var de densité f_X et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(X)$ est intégrable si $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f_X(x)\,dx < \infty$

et dans ce cas, l'espérance de $g(X)$ vaut

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx$$

Proposition Soit X une var

① Si pour un $k \in \mathbb{N}$, X^k est intégrable alors pour tout $i = 0, \dots, k$, X^i est intégrable

② Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée, alors $g(X)$ est intégrable.

Remarque En particulier, si X^2 est intégrable i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx < \infty$, alors X est intégrable.

Proposition Soit X une var. Pour tous $a \leq b$ (éventuellement infinis) :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[a,b]}(X)\right) = \mathbb{P}(X \in [a,b])}$$

Preuve $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{[a,b]}(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) f_X(x)\, dx$ par le théo. de transfert, avec $g(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

$$= \int_a^b f_X(x)\, dx = \mathbb{P}(X \in [a,b]).$$

3. Méthode des fonctions tests

Théorème Soit X une var. Si il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée, on a la relation

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx,$$

alors, f est une densité et X est une var de densité f.

Ce théorème permet de calculer les densités de var transformées, du type $\varphi(X)$. Par exemple, soit X une var de densité $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ (loi de Laplace). On veut calculer la loi de la var X^2.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On cherche une fonction f telle que

$$\mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f(y)\, dy.$$

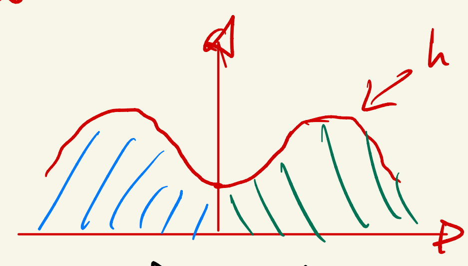
Alors, d'après le théorème, f est la densité de la var X^2.

D'après le théo de transfert,

$$\mathbb{E}(g(X^2)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x^2) \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$$

Rappel si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} h(x)\, dx$$



les 2 aires sont égales.

Or $g((-x)^2) e^{-|-x|} = g(x^2) e^{-|x|}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc

$x \mapsto g(x^2) e^{-|x|}$ est paire. Donc par le rappel :

$$\mathbb{E}(g(X^2)) = 2 \int_0^{+\infty} g(x^2) \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} g(x^2) e^{-x} dx$$

On effectue le changement de variable $y = x^2$, $x \geq 0$ (bien bijectif). Alors,

$x = \sqrt{y}$ et $dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$.

Donc $\mathbb{E}(g(X^2)) = \int_0^{+\infty} g(y)\, e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, e^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\, dy$

De ce fait, par le théorème, la v.a.r. X^2 possède pour densité la fonction

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)}$$

Exercice Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, calculer la densité de X^2 avec la méthode des fonctions test. Solution : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. C'est la loi de χ^2 à 1 degré de liberté.

4- Moments et variance

Définition Soient $k \in \mathbb{N}$ et X une var. Si X^k est intégrable, on appelle moment d'ordre k de X la quantité $\mathbb{E}(X^k)$.

Exemple Moment d'ordre 2 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ d'après le théo de transfert}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{u(x)}{\underset{\parallel}{x}} \times \underset{v'(x)}{\underset{\parallel}{\underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2}}}}} dx$$

$u'(x) = 1$ et $\boxed{v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}}$. Par une IPP, on trouve :

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{\left[x \times (-e^{-\frac{x^2}{2}}) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times (-e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$= 1$, car $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité.

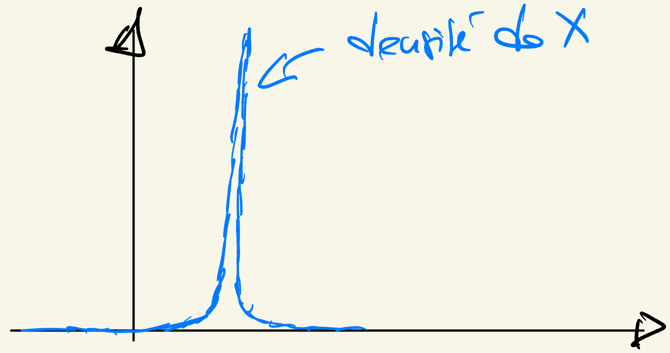
Proposition Soit X une v.a.r. telle que X^2 est intégrable. La variance de X, notée $\mathrm{var}(X)$, est définie par

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right)}$$

Elle vérifie la relation $\boxed{\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$ (Formule de Koenig).

La variance mesure l'écart (quadratique) entre les valeurs prises par la var et sa moyenne :

- si $var(X) \approx 0$, les réalisations de X ne s'éloignent pas trop de la moyenne de X



- si $var(X)$ très grande, les réalisations de X sont très dispersées

<u>Proposition</u> Soit X une var telle que X^2 est intégrable, alors

$$\boxed{var(aX+b) = a^2\, var(X)} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

(Formule de translation-homothétie).

On utilise souvent **l'écart-type** de X, qui est la racine carrée de la variance de X :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{var(X)}}$$

Son intérêt est qu'il est exprimé dans la même unité que X : si X est en mètres, $var(X)$ est en m^2 et $\sigma(X)$ est en m.

Exemples

① Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, calculer $var(X)$.

On sait que $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Posons $N = \frac{X-\mu}{\sigma}$. On a vu que $\mathbb{E}(N^2)=1$ et $\mathbb{E}(N) = 0$. Donc $var(N) = \mathbb{E}(N^2) = 1$. Alors

$$1 = var(N) = var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = var\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} var(X) \text{ par la prop.}$$

$\Rightarrow \boxed{var(X) = \sigma^2}$. On rappelle aussi que $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mu}$

Ainsi, μ et σ^2 ont aussi des interprétations probabilistes.

(2) Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,dx \quad \text{(théo. de transfert)}$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$b^3-a^3 = (b-a)(\alpha b^2 + \beta ab + \gamma a^2)$ avec α, β, γ à trouver.

Il est clair que $\alpha = \gamma = 1$, donc $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+\beta ab + a^2)$

$$= b^3 + \beta ab^2 + a^2 b - ab^2 - \beta a^2 b - a^3$$

$$= b^3 + (\beta-1)ab^2 + (1-\beta)a^2 b - a^3$$

Par identification, $\beta = 1$, d'où $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$.

Donc $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{b^2+ab+a^2}{3}$. D'après la formule de Koenig :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-3b^2-6ab}{12} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12}$$

3) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On a vu que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} \underset{\underset{u(x)}{\parallel}}{x^2}\, \underset{\underset{v'(x)}{\parallel}}{e^{-\lambda x}}\, dx$$

$u'(x) = 2x$

$v(x) = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

IPP

$$= \lambda \left(\underbrace{\left[x^2 \times \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} 2x \times \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, dx = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$ Donc $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}}$