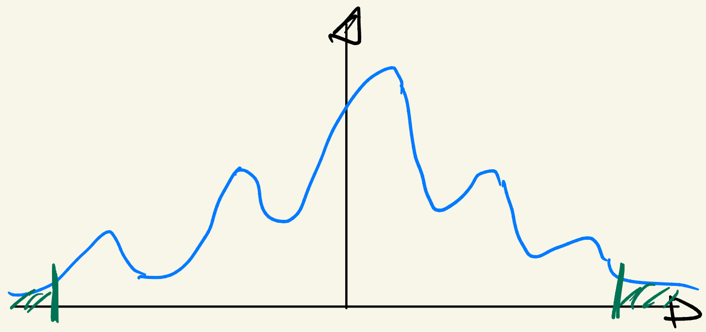
5 - Deux inégalités fondamentales

Pour X une var, on veut déterminer (ou majorer) des quantités du type $\mathbb{P}(|X| \geq a)$ pour a "grand".



On veut donner des infos sur l'aire hachurée en vert pour les gdes valeurs de a. Comportement des "queues" de la loi de X.

<u>Théorème</u> Soit X une v.a.r. et soit $a > 0$.

1 - Si X est intégrable, $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$ (Inégalité de Markov)

2 - Si X^2 est intégrable, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$ (Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev).

Par exemple, considérons le cas de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. On sait que $\mathbb{E}(X)=0$ et $\mathrm{Var}(X)=1$. De plus,

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{f^{\circ} \text{ paire}} dx$$

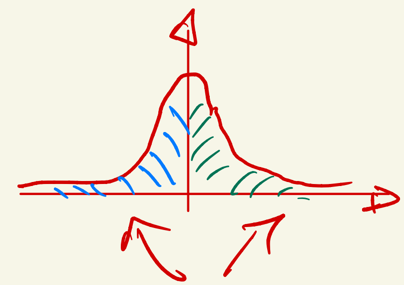
par le théo. de transfert avec $g(x)=|x|$.

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \underbrace{|x|}_{\substack{\shortparallel \\ x \text{ car } x \geq 0}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (0+1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

__Rappel__ Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)dx$$



aires égales.

Alors, appliquons les 2 inégalités; $\forall a > 0$:

- $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{a} = \dfrac{\sqrt{2/\pi}}{a} \simeq \dfrac{0{,}8}{a}$ (Markov)

- $\mathbb{P}(|X| \geq a) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \mathbb{E}(X)=0}}{=} \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}$ (BT)

Pour les gdes valeurs de a $(a \geq 2)$, $\frac{1}{a^2}$ est plus petit que $\frac{0{,}8}{a}$, donc la borne de BT est de meilleure qualité.

CHAPITRE 4 : COUPLES À DENSITÉ

1 - Variables aléatoires dans le plan.

Si X modélise la taille des individus et Y le poids des individus, faire une étude séparée de X et Y ne pourra pas mener à une étude des liens entre X et Y, alors que poids et taille sont évidemment liés.

Pour faire une étude du lien entre X et Y, il faut étudier plutôt le couple de var (X,Y).

Définition Un couple de var est une fonction

$$(X,Y) : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

Rappel Ω est l'ensemble des conditions expérimentales.

Comme Ω est inconnu, on ne peut pas décrire la fonction (X,Y), donc on se retranche sur une caractérisation + faible : la loi.

Définition Soit (X,Y) un couple de var. La loi de (X,Y) est représentée par toutes les probabilités :

$$\mathbb{P}\big((X,Y)\in [a,b]\times[c,d]\big) = \mathbb{P}\big(X\in[a,b],\, Y\in[c,d]\big)$$
$$= \mathbb{P}\big(a\leq X\leq b,\ c\leq Y\leq d\big)\ ,\ \forall\ a\leq b,\ c\leq d.$$

On a une notion de densité dans le plan

Définition Une densité f sur $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que

(1) $f(x,y)\geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

Notation On utilisera la notation de Lebesgue :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{not.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple Montrer que $f(x,y) = (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$ est une densité sur $\mathbb{R}^2$.

On a $f(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Puis,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{(x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)}_{\geq 0}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{par Fubini}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \left(\int_{\mathbb{R}} (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Donc f est une densité sur $\mathbb{R}^2$.

Définition Le couple de var (X,Y) est dit à densité si il existe une densité $f_{X,Y}$ sur $\mathbb{R}^2$, appelée densité jointe du couple, telle que pour tous $a \leq b$ et $c \leq d$ (éventuellement infinis) :

$$\mathbb{P}((X,Y) \in]a,b[\times]c,d[) = \mathbb{P}(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

Remarque importante Si (X,Y) possède une densité $f_{X,Y}$, alors

$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ et donc

$\mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \mathbb{P}(a < X < b, c < Y < d) = \mathbb{P}(a \leq X < b, c < Y \leq d) =$ etc...

De plus, $\boxed{f_{X,Y} = 0 \text{ sur } \overline{S} \iff \mathbb{P}((X,Y) \in S) = 1}$

Exemple (X,Y) de densité $f_{X,Y}(x,y) = (x+y)\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Calculer

$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{4}\right)$

$$\mathbb{P}\left(X \le \tfrac{1}{2}, Y \le \tfrac{1}{4}\right) = \mathbb{P}\left(-\infty < X \le \tfrac{1}{2}, -\infty < Y \le \tfrac{1}{4}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{1/2}\int_{-\infty}^{1/4} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{1/2}\int_{-\infty}^{1/4} (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dx\,dy$$

Fubini

$$= \int_{0}^{1/2}\int_{0}^{1/4} \underbrace{(x+y)}_{\ge 0}\,dx\,dy = \int_{0}^{1/2}\left(\int_{0}^{1/4}(x+y)\,dy\right)dx \quad \left(= \int_{0}^{1/4}\left(\int_{0}^{1/2}(x+y)\,dx\right)dy\right)$$

$$= \int_{0}^{1/2}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1/4} dx = \int_0^{1/2}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{32}\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{32}\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{3}{64}$$

$$\mathbb{P}\left(X \le \tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\Big(-\infty < X \le \tfrac{1}{2}, \overbrace{-\infty < Y < +\infty}^{=\Omega}\Big)$$

$$S = \int_{-\infty}^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2}\left(\int_0^{1}(x+y)\,dy\right)dx$$

$$S = \int_0^{1/2} \left[yx + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{1/2} \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$S = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Comme dans le cas univarié, la loi gaussienne joue un rôle majeur dans le plan.

<u>Définition</u> Soit $\mu \in \mathbb{R}^2$ et Σ une matrice 2×2 à coefficients réels, symétrique et définie positive. Un couple de var (X, Y) suit une loi normale bivariée de paramètres (μ, Σ) si sa densité jointe $f_{X,Y}$ est définie par

$$f_{X,Y}(x) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t(x-\mu)\, \Sigma^{-1} (x-\mu) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$