CC2 le mercredi 17 avril, de 8h30 à 10h, dans l'amphi A1

Programme : tout ce qui aura été vu

2- Loi marginale

Si (X,Y) possède une densité $f_{X,Y}$, on peut retrouver la densité de X :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(-\infty < X \leq x, \underbrace{-\infty < Y < +\infty}_{=\Omega})$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\, du\, dv \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v)\, dv \right)}_{\to \text{densité de } X \text{ au point } u} du$$

Théorème Soit (X,Y) un couple de var de densité $f_{X,Y}$. Alors, X et Y possèdent des densités, dites "densités marginales", notées f_X et f_Y, et définies par

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Attention ! Si on a la densité $f_{X,Y}$ du couple (X,Y), on peut donc retrouver les densités de X et de Y. Mais la réciproque est fausse ! Si on dispose des densités f_X et f_Y de X et Y, on ne peut pas (sans autre info.) retrouver la densité $f_{X,Y}$ du couple (X,Y).

Exemple Soit (X,Y) un couple de var de densité $f(x,y) = (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.

Calculer les densités marginales de X et Y.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \int_0^1 (x+y)\,dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

De plus, comme f est symétrique (i.e. $f(x,y) = f(y,x)$) on a $f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\left(y+\frac{1}{2}\right)$ d'où $X \sim Y$. En effet :

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \overset{\text{symétrie}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y,x)\,dx = f_X(y)$$

3. Espérance

Théorème (de transfert) Soient (X,Y) un couple de var de densité $f_{X,Y}$ et $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si $\int_{\mathbb{R}^2} |g(x,y)| f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy < \infty$, on dit que la v.a.r. $g(X,Y)$ est intégrable et, dans ce cas, l'espérance ou moyenne de $g(X,Y)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Exemple Soit (X,Y) un couple de var de densité $f(x,y) = (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$.

Calculer $\mathbb{E}(XY^2)$. On applique le théorème de transfert avec $g(x,y) = xy^2$:

$$\mathbb{E}(XY^2) = \int_{\mathbb{R}^2} xy^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} xy^2 (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} xy^2 (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \left(\int_{\mathbb{R}} x(x+y)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left(\int_0^1 (x^2+xy)\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^3}{3} + y\,\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} y^2 + \frac{1}{2} y^3 \right) dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{17}{72}$$

<u>Exemple</u> Soit $(X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, I_d \right)$. Calculer la loi de X.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} (x, y-1) \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(x^2 + (y-1)^2 \right) \right)$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(x^2 + (y-1)^2 \right) \right) dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2}}_{= \text{densité de la loi } \mathcal{N}(1,1)} dy}^{=1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{i.e. } \boxed{X \sim \mathcal{N}(0,1)}$$

Proposition Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et (X,Y) un couple de var. Si X et Y sont intégrables, alors $aX + bY$ est intégrable et on a

$$\boxed{\mathbb{E}(aX+bY) = a\,\mathbb{E}(X) + b\,\mathbb{E}(Y).}$$

Exemple (X,Y) de densité $f(x,y) = (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. On a déjà vu que $X \sim Y$ et que $f_X(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

Calculer $\mathbb{E}(X+2Y)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+2Y) &= \mathbb{E}(X) + 2\,\mathbb{E}(Y) \quad \text{par la proposition}\\
&= 3\,\mathbb{E}(X) \quad \text{car } X \sim Y\\
&= 3\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = 3\int_{\mathbb{R}} x\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx\\
&= 3\int_0^1 \left(x^2+\tfrac{x}{2}\right)dx = 3\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = 3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

4. Covariance

On a vu que la variance d'une var mesure l'écart entre les valeurs prises par la var et sa moyenne. La covariance entre 2 var permet de quantifier le lien entre ces var.

Définition Soit (X,Y) un couple de var tel que X^2 et Y^2 sont intégrables.
La covariance entre X et Y, notée $\operatorname{cov}(X,Y)$ est définie par

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = E\Big((X-E(X))(Y-E(Y))\Big)}$$

On note aussitôt que $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var}(X)$

Proposition Soit (X,Y) un couple de var telles que X^2 et Y^2 sont intégrables.

1. $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$
3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y)$ et $\operatorname{cov}(X+a,Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$
4. $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $\operatorname{var}(aX+bY) = a^2\operatorname{var}(X) + b^2\operatorname{var}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

Exemple (X,Y) de densité $f(x,y) = (x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Il faut tout d'abord calculer $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Comme $X \sim Y$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{7}{12}$ (vu plus haut)

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} xy(x+y)\,\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 xy\,(x+y)\, dx \right) dy = \int_0^1 y \left(\int_0^1 (x^2+xy)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 y \left[\frac{x^3}{3} + y\,\frac{x^2}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 y \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) dy = \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Donc $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\,\frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$

<u>Exercice</u> (X,Y) de densité $f(x,y)=\frac{1}{4}(1+xy)\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y)$. Calculer les densités marginales de X et Y, $\mathrm{cov}(X,Y)$ et $\mathrm{var}(X+Y)$.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(1+xy)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}(1+xy)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\,dy=\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}(1+xy)\,dy$$

$$=\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\left[y+x\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\left(1+\cancel{\frac{x}{2}}-\left(-1+\cancel{\frac{x}{2}}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{ie} \quad \boxed{X\sim \mathcal{U}([-1,1])}.$$

Comme f est symétrique, $\boxed{Y\sim X\sim \mathcal{U}([-1,1])}$

f symétrique car $f(x,y)=f(y,x)$

Comme $X\sim Y\sim \mathcal{U}([-1,1])$, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=0$ donc

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)=\int_{\mathbb{R}^2} xy\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\mathbb{R}^2} xy\,\frac{1}{4}(1+xy)\,\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y)\,dx\,dy$$

Fubini

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xy}{4} (1+xy) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \mathbb{1}_{[-1,1]}(y) \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} y \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+xy) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \, dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} y \left(\int_{-1}^{1} x(1+xy) \, dx \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} y \left[\frac{x^2}{2} + y \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} y \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} y - \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} y \right) \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} y^2 \, dy = \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} y^2 \, dy$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

$X \sim \mathcal{U}([-1,1])$ donc

$$\mathrm{var}(X) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$$