FEUILLE TD3

Exercice 1

1. Echantillon $X_1, \dots, X_n$ iid de loi $\mathcal{G}(\theta)$, $\theta \in [0,1; 0,5]$.

a) D'après la LGN, $\bar{X}_n \approx \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\theta}$ car $X_1 \sim \mathcal{G}(\theta)$. Comme le paramètre d'intérêt est $\frac{1}{\theta}$, un estimateur naturel est donc $\bar{X}_n$.

$B_{\bar{X}_n}(\theta) = \mathbb{E}(\bar{X}_n) - \frac{1}{\theta}$ (= moyenne de l'estimateur − paramètre d'intérêt)

$$= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) - \frac{1}{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} \text{ car } X_i \sim \mathcal{G}(\theta)$$

$$= \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0,$$

donc $\bar{X}_n$ estime $\frac{1}{\theta}$ sans biais.

b) $R_{\bar{X}_n}(\theta) = \mathbb{E}\left(\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right)^2\right)$ (= moyenne quadratique de l'estimateur − param. d'intérêt).

$$= \mathbb{E}\left((\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n))^2\right) \quad \text{car } \bar{X}_n \text{ sans biais} \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \mathbb{E}(\bar{X}_n).$$

$$= var(\bar{X}_n) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_1) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ de } \overline{m} \text{ loi}$$

$$= \frac{var(X_1)}{n} = \frac{1-\theta}{n\theta^2} \quad \text{car } var(X_1) = \frac{1-\theta}{\theta^2} \text{ d'après ex. 3, feuille TD1.}$$

On sait que $\theta \geq 0,1$ donc $1-\theta \leq 1-0,1 = 0,9$ et $\theta^2 \geq 0,01$ d'où $\frac{1}{\theta^2} \leq 100$

Alors $\frac{1-\theta}{\theta^2} \leq 0,9 \times 100 = 90$ d'où

$$\boxed{R_{\bar{X}_n}(\theta) \leq \frac{90}{n}}$$

Note : $var(\bar{X}_n) \leq \frac{90}{n}$

ⓒ BT : $\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \underset{\frac{1}{\theta}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(\bar{X}_n)}}| \geq a) \leq \frac{var(\bar{X}_n)}{a^2} \leq \frac{90}{na^2}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right| \geq a\right) \leq \frac{90}{na^2} \iff 1 - \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right| < a\right) \leq \frac{90}{na^2}$$

$$\iff \mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right| < a\right) \geq 1 - \frac{90}{na^2}$$

On choisit a de sorte que $1 - \frac{90}{na^2} = 0,95 \iff \frac{90}{na^2} = 0,05 \iff a^2 = \frac{90}{0,05 \times n}$

$$\iff a^2 = \frac{1800}{n} \iff \boxed{a = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}$$

Ainsi, $\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{\theta}\right| < \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$

$$\iff \mathbb{P}\left(\frac{1}{\theta} \in \left]\bar{X}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right[\right) \geq 0,95$$

L'IC pour $\frac{1}{\theta}$ par excès au niveau 95% est donc $\left]\bar{X}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right[$.

__AN__ $n = 1000$ et $\bar{x}_n = 30$. Alors, avec un niveau de confiance de 0,95 on a :

(θ^* = vraie valeur) $\quad \frac{1}{\theta^*} \in \left]30 - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{1000}}, 30 + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{1000}}\right[= \left]28,65 ; 31,34\right[$

② On sait que $\frac{1}{\theta} \in \left] \bar{x}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}} ; \bar{x}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right[$ avec une proba $\geq 0,95$.

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\theta} < \bar{X}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec une proba } \geq 0,95$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\bar{X}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} < \theta < \frac{1}{\bar{X}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} \quad \text{avec une proba } \geq 0,95.$$

Donc $\left] \frac{1}{\bar{X}_n + \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} ; \frac{1}{\bar{X}_n - \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{n}}} \right[$ est un IC par excès pour θ au niveau 0,95

Exercice 2

① ⓐ $B_{\bar{X}_n}(\theta) = \mathbb{E}(\bar{X}_n) - m(\theta) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - m(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) - m(\theta)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\theta) - m(\theta) = m(\theta) - m(\theta) = 0$$

Donc $\bar{X}_n$ estime $m(\theta)$ sans biais.

⑥ $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$ $$\left(\approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}(X_1))^2 \text{ par LGN}\right.$$

$$\left.\approx \mathbb{E}\left((X_1-\mathbb{E}(X_1))^2\right) = \mathrm{Var}(X_1) \text{ par LGN}\right).$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + (\overline{X}_n)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{X}_n + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_n)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2}{n-1}\overline{X}_n\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i}_{=n\overline{X}_n} + \frac{1}{n-1}(\overline{X}_n)^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}1}_{=n}$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{2n}{n-1}(\overline{X}_n)^2 + \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \frac{n}{n-1}(\overline{X}_n)^2$$

Donc $$\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)}_{=\mathbb{E}(X_1^2)} - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left((\overline{X}_n)^2\right) = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{n}{n-1}\mathbb{E}\left((\overline{X}_n)^2\right)$$

Or, $\mathbb{E}\left((\overline{X}_n)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right)$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} X_i X_j\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i^2)}_{=\mathbb{E}(X_1^2)} + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\underbrace{\mathbb{E}(X_i X_j)}_{\substack{=\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) \text{ car } X_i \text{ indep de } X_j\ (i\neq j)\\ = m(\theta)^2}}$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(X_1^2)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{=n} + \frac{1}{n^2} m(\theta)^2 \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} 1}_{=n(n-1)\text{, cf CM séance 5}}$$

$$= \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1^2) + \frac{n-1}{n} m(\theta)^2$$

Donc $\mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) = \frac{n}{n-1}\mathbb{E}(X_1^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1^2) + \frac{n-1}{n} m(\theta)^2\right)$

$$= \frac{n-1}{n-1}\,\mathbb{E}(X_1^2) - m(\theta)^2 = \mathbb{E}(X_1^2) - m(\theta)^2 = \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2)$$

Alors $$B_{\hat{\sigma}^2}(\theta) = \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) - \sigma(\theta)^2 = \mathbb{E}(X_1^2) - m(\theta)^2 - \left(\mathbb{E}(X_1^2) - m(\theta)^2\right)$$

$$= 0$$