5. Lois de couples transformés

Pour une fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (h_1(x,y), h_2(x,y)) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$, son déterminant jacobien $\det J_h$ est défini par

$$\det J_h(x,y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

On rappelle aussi que h est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur l'ouvert $S \subset \mathbb{R}^2$ si, sur S, h est une bijection continûment différentiable et de réciproque continûment différentiable.

Théorème Soit (X,Y) un couple de var de densité $f_{X,Y}$ et tel que $\mathbb{P}((X,Y) \in S) = 1$ où S est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur S. Alors, le couple de var $\varphi(X,Y)$ possède une densité donnée par

$$f_{\varphi(X,Y)}(u,v) = f_{X,Y}\left(\varphi^{-1}(u,v)\right) \left| \det J_{\varphi^{-1}}(u,v) \right|$$

Exemple. Soit (X,Y) de densité

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \text{ i.e. } (X,Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, Id\right).$$

Loi du couple $(X, X+Y)$? On a $\varphi(x,y) = (x, x+y)$

Calculons φ^{-1}. Soient $(u,v), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\varphi(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow (x, x+y) = (u,v)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ x+y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v - x = v-u \end{cases}$$ soit $\varphi^{-1}(u,v) = (u, v-u)$

Calculons $\det J_{\varphi^{-1}}$. On a $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Par suite, d'après le théorème :

$$f_{X,X+Y}(u,v) = f\left(\varphi^{-1}(u,v)\right) |\det J_{\varphi^{-1}}(u,v)| = f(u, v-u)$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+(v-u)^2)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(2u^2-2uv+v^2)}$$

On peut en déduire la densité de $X+Y$, en temps que loi marginale de $(X, X+Y)$:

$$f_{X+Y}(v) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,X+Y}(u,v)\,du = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(2u^2 - 2uv + v^2)}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(2u^2 - 2uv)}\,du$$

Or, $2u^2 - 2uv = 2(u^2 - uv) = 2\left(\left(u - \frac{1}{2}v\right)^2 - \frac{v^2}{4}\right)$ d'où

$$f_{X+Y}(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(u-\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{v^2}{4}}\,du = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(u-\frac{1}{2}v\right)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(u-\frac{1}{2}v\right)^2}\,du$$

On applique le changement de variable $w = u - \frac{1}{2}v$, $dw = du$ d'où

$$f_{X+Y}(v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-w^2}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v^2}{4}} \sqrt{2\pi \times \frac{1}{2}} \quad \left(\sigma^2 = \frac{1}{2}\right)$$

<u>Rappel</u>

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}\,dx = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

Donc $f_{X+Y}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 2}} e^{-\frac{u^2}{2\times 2}}$ i.e. $\boxed{X+Y \sim \mathcal{N}(0,2)}$

CHAPITRE 5 : INDEPENDANCE

1. Notion d'indépendance

Intuitivement, 2 var sont indépendantes si la connaissance de l'une ne donne aucune information sur la valeur de l'autre. Comment formaliser ceci ?

<u>Définition</u> Soit (X,Y) un couple de var. On dit que X et Y sont indépendantes, et on note $X \perp Y$, si pour tous $a \leq b$ et $c \leq d$:

$$\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d\right) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\,\mathbb{P}(c \leq Y \leq d).$$

Tel quel, vérifier l'indépendance est compliqué. Mais on a des cas plus simples :

<u>Proposition</u> Soit (X,Y) un couple de var de densité $f_{X,Y}$. On note f_X et f_Y les densités de X et Y. Alors

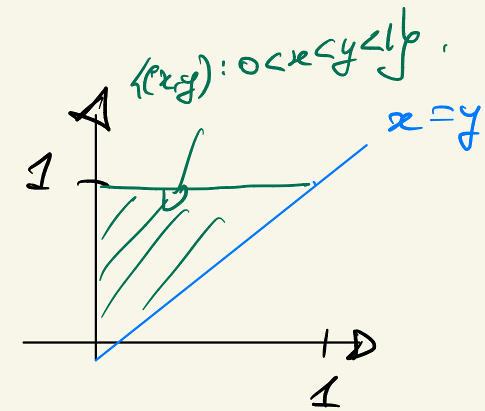
$$\boxed{X \perp Y \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}}$$

Exemples (X,Y) de densité $f_{X,Y}$

- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y)$: $f_{X,Y}(x,y)$ ne s'écrit pas sous la forme d'une f$^{\text{o}}$ de x multipliée par une fonction de y, donc $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y) = \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\right)\left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\right)$ donc $X \perp\!\!\!\perp Y$.

- $f_{X,Y}(x,y) = 2\,\mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}$



ne s'écrit pas sous la forme d'une f$^{\text{o}}$ de x multipliée par une fonction de y, donc $X \not\perp\!\!\!\perp Y$.

- Soient $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ telles que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Quelle est la densité de (X,Y) ? Comme $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

2 – Espérance et indépendance

Théorème Soient X et Y des v.a.r. et $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\varphi(X) \perp\!\!\!\perp \psi(Y)$ et si $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont intégrables, alors

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\psi(Y)\big) = \mathbb{E}\big(\varphi(X)\big)\,\mathbb{E}\big(\psi(Y)\big).$$

En conséquence, si $X \perp\!\!\!\perp Y$:

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$$

Donc $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = 0$. Mais la réciproque est fausse ! En effet, soient $U \sim V \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $U \perp\!\!\!\perp V$ et on note $X = U$ et $Y = \left(2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V) - 1\right)U$

On va montrer que $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$, mais que $X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$, ce qui montre que la réciproque est fausse.

Tout d'abord, on a $\mathbb{E}(X) = 0$ car $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$ d'où

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\left(2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V) - 1\right)}_{f^\circ \text{ de } V}\underbrace{U^2}_{f^\circ \text{ de } U}\Big)$$

$$= \mathbb{E}\left(2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V)-1\right)\mathbb{E}(U^2) \text{ d'après le théo, car } U \perp\!\!\!\perp V.$$

$$= \left(2\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V)\right)-1\right)\mathbb{E}(U^2) = \left(2\underbrace{\mathbb{P}(V\in\mathbb{R}_+)}_{=\frac{1}{2} \text{ car } V\sim\mathcal{U}([-1,1])}-1\right)\mathbb{E}(U^2)$$

Rappel

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$

$$= \left(2\times\frac{1}{2}-1\right)\mathbb{E}(U^2) = 0.$$

Montrons maintenant que $X \not\!\perp\!\!\!\perp Y$. Par l'absurde, supposons que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Alors par le théorème, on a $\mathbb{E}(X^2Y^2) = \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$.

Or, $2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V)-1 = \begin{cases} 1 & \text{si } V\geq 0 \\ -1 & \text{si } V<0 \end{cases}$ donc $\left(2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V)-1\right)^2 = 1$ et par suite,

$$Y^2 = \left(2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(V)-1\right)^2U^2 = U^2 = X^2$$

Alors, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(U^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2\,\frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \mathbb{E}(U^4) = \int_{\mathbb{R}} x^4 \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

Conclusion : $\frac{1}{5} = \mathbb{E}(X^2Y^2) \neq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{9}$ donc par l'absurde, $X \not\perp\!\!\!\perp Y$

On a donc trouvé un couple de var (X,Y) t.q. $\mathrm{cov}(X,Y)=0$ et $X \not\perp\!\!\!\perp Y$