Benoit Cadre

1 CM toutes les 2 semaines, 1 TD toutes les 2 semaines

MCC : 1 examen terminal

Chapitre 1 : Rappels de probabilités discrètes

1- Variables aléatoires discrètes

Considérons l'expérience aléatoire : on lance une pièce et on note le résultat, soit pile, soit face. Pour modéliser cette expérience, on introduit la fonction

$$X : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 1 = \text{codage de pile} \\ 0 = \quad '' \quad \text{face} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ ensemble de toutes les conditions de l'expérience.

Notez que Ω est inconnu, au sens où on ne peut pas le décrire de manière exhaustive. Ω est appelé univers.

Définition Une variable aléatoire discrète (vad) est une fonction $X : \Omega \to D$, où D est un ensemble discret ($D = \mathbb{Z}^d$, $D = \mathbb{N}^d$, $D = \{0, 1\}$ etc)

Une réalisation de la vad X est une valeur $X(\omega)$, pour un $\omega \in \Omega$.

Définition Soit X une vad à valeurs dans D. La loi de X est caractérisée par la connaissance de $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in D$.

Ici, $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, et le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. On rappelle que $\mathbb{P}$ est une proba. sur Ω si

① $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$

② $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

③ $\forall (A_n)_n$ suite disjointe, $A_n \subset \Omega$ $\forall n$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$.

Revenons au lancer de pièce, modélisé par la vad X à valeurs dans $\{0,1\}$.
Si la pièce est équilibrée, $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2}$, donc on connait la loi de X.

2 – Lois discrètes usuelles

Pour indiquer qu'une vad X suit la loi $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$

1 – Loi uniforme sur $A \subset \mathbb{Z}^d$ <u>fini</u>, notée $\mathcal{U}(A)$

On a $X \sim \mathcal{U}(A)$ si

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{\text{card}(A)}, \quad \forall x \in A$$

<u>Ex</u> : Lancer d'un dé équilibré

2 – Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(p)$

On a $X \sim \mathcal{B}(p)$ si $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$

<u>Ex</u> : lancer d'une pièce.

3. Loi binomiale de paramètres (n,p), notée $\mathcal{B}(n,p)$. ($n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$)

On a $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

$$\mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x \in \{0,\dots,n\}$$

Ex : lancer n fois d'une pièce avec proba pile $=p$. Alors X modélise le nombre de pile obtenus au cours des n lancers.

4. Loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$.

On a $X \sim \mathcal{G}(p)$ si

$$\mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$$

Ex : on lance une infinité de fois une pièce avec une proba p d'obtenir pile, et X modélise la 1ère fois qu'on a obtenu pile

5- Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Elle modélise les évènements rares, cf chap. 2.

3- Espérance

Pour X une vad à valeurs dans D, la moyenne ou espérance notée $\mathbb{E}(X)$ est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

sous réserve de converge absolue de la somme (implicite dorénavant)

Théorème de transfert Soit X une vad à valeurs dans D et $g : D \to \mathbb{R}$

Alors, l'espérance de la vad $g(X) = g \circ X$ vaut

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in D} g(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Propriétés de l'espérance

① Si X_1 et X_2 des vad t.q. $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, alors

$$\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2)$$

② Si X_1, X_2 sont des vad et $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\boxed{\mathbb{E}(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2)}$$

③ Si X est une vad, $\boxed{|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)}$

La variance est un outil qui mesure la dispersion des observations de la vad autour de sa moyenne. Elle est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

En pratique, pour calculer la $\mathrm{Var}(X)$, on utilise :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) \qquad \text{(Formule de Koenig)}$$

Pour la variance, on a la formule de translation - homothétie :

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\, \mathrm{Var}(X) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

LOI	MOYENNE	VARIANCE
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

$X \sim \mathcal{B}(p)$

- $\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 0 \times \mathbb{P}(X=0)$
  $= p$

- $X^2 = X$, donc
  $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
  $= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$
  $= p - p^2 = p(1-p)$

4. Indépendance

Les vad $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans D sont indépendantes si $\forall I \subset \{1, \dots, n\}$ et $\forall x_i \in D$ $\forall i = 1, \dots, n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Notez que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\forall g_i : D \to \mathbb{R}$,

$g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont des vad indépendantes.

De plus, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

$$\boxed{\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)}$$

5- Quelques résultats incontournables.

Théorème Soit X une vad et $a>0$. Alors,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$: inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{a^2}$$: inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X_1, X_2 des vad, alors $\mathbb{E}(X_1 X_2)^2 \leq \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2)$

Théorème (Loi des grands nombres)

Soient $X_1, X_2, \dots$ des vad indépendantes et de même loi.

Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_1) \right| \right) = 0$$

Interprétation : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathbb{E}(X_1)$ si "n est grand"