

FEUILLE TD1

Exercice 1

$$X \sim \mathcal{P}(\theta) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X=k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Rappel $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_k g(k) \mathbb{P}(X=k)$ (Théo. de trans fert)

Id, pour $\mathbb{E}(X)$, on prend $g = \text{Id}$ d'où

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \mathbb{P}(X=k)$$

Rappel $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{l \geq 0} \frac{x^l}{l!}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} k e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta} \sum_{k \geq 1} k \frac{\theta^k}{k!} = e^{-\theta} \sum_{k \geq 1} \frac{\theta^k}{(k-1)!} = e^{-\theta} \theta \sum_{k \geq 1} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\stackrel{l=k-1}{=} e^{-\theta} \theta \sum_{l \geq 0} \frac{\theta^l}{l!} = e^{-\theta} \theta e^{\theta} = \theta$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad (\text{Koenig}).$$

Dans un 1^{er} temps, on calcule

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k \geq 2} k(k-1) P(X=k) \quad (\text{th. de transfert avec } g(x) = x(x-1))$$

$$= \sum_{k \geq 2} k(k-1) e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \quad k! = k(k-1) \times (k-2)!$$

$$= e^{-\theta} \sum_{k \geq 2} \frac{\theta^k}{(k-2)!} = e^{-\theta} \theta^2 \sum_{k \geq 2} \frac{\theta^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$\stackrel{l=k-2}{=} e^{-\theta} \theta^2 \sum_{l \geq 0} \frac{\theta^l}{l!} = e^{-\theta} \theta^2 e^{\theta} = \theta^2$$

$$\text{Alors } \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1) + X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \theta^2 + \theta$$

$$\text{Donc } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \theta^2 + \theta - \theta^2 = \theta$$

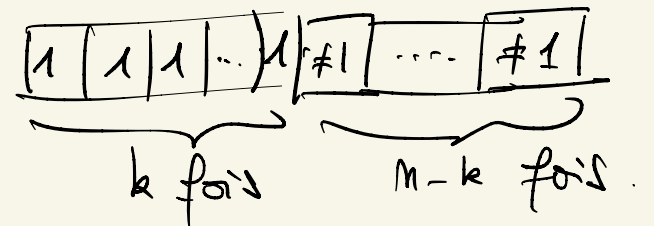
Exercice 2

① X prend ses valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ i.e. $X: \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\}$.

Il suffit de calculer $P(X=k)$, $\forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-k}$$



Donc $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})}$

On note $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{ème lancer donne "1"} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, i=1, \dots, n$

On a $P(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{6}$ donc $\varepsilon_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{6})$. De plus, comme les lancers de dé sont indépendants, les v.a.d. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes. Enfin, $X = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$

Rapports $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^p z_i\right) = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}(z_i)$ et $\text{var}\left(\sum_{i=1}^p z_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{var}(z_i)$

$\hookrightarrow$ As $z_1, \dots, z_p$ sont indépendantes

② $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{6}$ car $\varepsilon_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_i) = \frac{1}{6}$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n}{6}}$$

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \text{var}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(\varepsilon_i) \text{ car } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) \text{ car } \varepsilon_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \text{var}(\varepsilon_i) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{var}(X) = \frac{5}{36} n}$$

③ $X+Y$ modélise le nombre de "1" obtenus lors de $2n$ lancers de dé. On a $\boxed{X+Y \sim \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{6}\right)}$

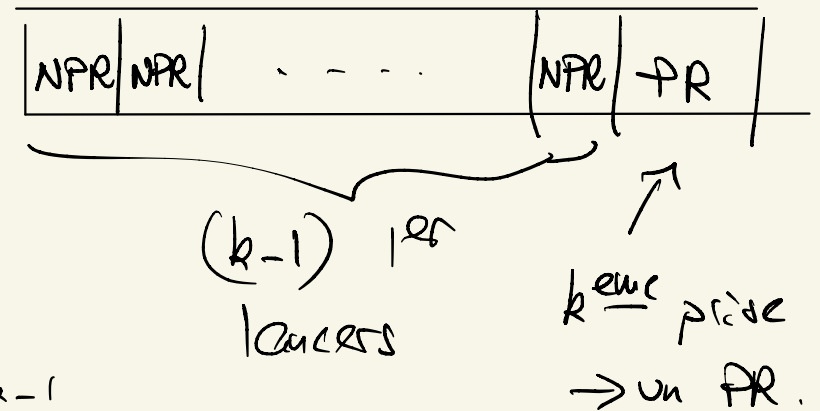
Exercice 3

① L'ensemble des valeurs prises par X est $\mathbb{N}^*$. Donc calculer la loi de X c'est calculer $P(X=k), \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X=k) = (1-\theta)^{k-1} \theta$$

Donc $X \sim \mathcal{G}(\theta)$



$$\textcircled{2} \quad E(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k P(X=k) = \sum_{k \geq 1} k (1-\theta)^{k-1} \theta$$

Rappel Si $|x| < 1$, $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. En dérivant : $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$E(X) = \theta \sum_{k \geq 1} k (1-\theta)^{k-1} = \theta \frac{1}{(1-(1-\theta))^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

Pour le calcul de $\text{var}(X)$, on commence par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k \geq 1} k(k-1) \mathbb{P}(X=k) \quad (\text{th. de transfert}) \\ &= \theta \sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-\theta)^{k-1}\end{aligned}$$

Rappel si $|x| < 1$, $\sum_{k \geq 1} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En dérivant $\sum_{k \geq 2} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \theta(1-\theta) \sum_{k \geq 2} k(k-1)(1-\theta)^{k-2} = \theta(1-\theta) \frac{2}{(1-(1-\theta))^3} = \theta(1-\theta) \frac{2}{\theta^3} \\ &= \frac{2(1-\theta)}{\theta^2}\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1) + X) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{2(1-\theta)}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{2(1-\theta) + \theta - 1}{\theta^2} = \frac{1-\theta}{\theta^2}\end{aligned}$$

3a) Compétition entre 2 pêcheurs A et B

$$\left. \begin{array}{l} X = \text{nb de poissons pêchés par A} \\ Y = \text{ " " " B} \end{array} \right\} \begin{array}{l} A \text{ gagne si } X < Y \end{array}$$

Alors $P(X < Y)$ est la probabilité que A gagne.

X et Y de loi $\mathcal{G}(\theta)$, indépendantes. En particulier, X et Y ont $\bar{\alpha}$ valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On a

$$\{X < Y\} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}^* \\ l > k}} \{X = k, Y = l\} \quad \text{réunion disjointe}$$

Comme la réunion est disjointe,

$$P(X < Y) = \sum_{1 \leq k < l} P(X = k, Y = l) = \sum_{1 \leq k < l} P(X = k) P(Y = l) \quad \text{car } X, Y \text{ indép.}$$

$$= \sum_{1 \leq k < l} (1-\theta)^{k-1} \theta (1-\theta)^{l-1} \theta \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ de loi } \mathcal{G}(\theta)$$

$$= \theta^2 \sum_{k \geq 1} (1-\theta)^{k-1} \sum_{l \geq k+1} (1-\theta)^{l-1}$$

Rappel si $x \in]0, 1[$

$$\sum_{i \geq 0} x^i = \frac{1}{1-x}$$

Soit $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq k+1} (1-\theta)^{l-1} &= (1-\theta)^k + (1-\theta)^{k+1} + (1-\theta)^{k+2} + \dots \\ &= (1-\theta)^k (1 + (1-\theta) + (1-\theta)^2 + \dots) = (1-\theta)^k \sum_{i \geq 0} (1-\theta)^i \\ &= (1-\theta)^k \frac{1}{1-(1-\theta)} = \frac{1}{\theta} (1-\theta)^k \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \theta \cancel{\frac{1}{\theta}} \sum_{k \geq 1} (1-\theta)^{k-1} (1-\theta)^k = \theta \sum_{k \geq 1} (1-\theta)^{2k-1} \\ &= \theta \left((1-\theta) + (1-\theta)^3 + (1-\theta)^5 + \dots \right) \\ &= \theta \left((1-\theta) + \sum_{i \geq 1} (1-\theta)^{2i+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \theta \left((1-\theta) + (1-\theta) \sum_{i \geq 1} (1-\theta)^{2i} \right) = \theta(1-\theta) \left(1 + \sum_{i \geq 1} (1-\theta)^{2i} \right)$$

$$= \theta(1-\theta) \left(1 + \sum_{i \geq 1} ((1-\theta)^2)^i \right) = \theta(1-\theta) \sum_{i \geq 0} ((1-\theta)^2)^i$$

$$= \theta(1-\theta) \frac{1}{1-(1-\theta)^2} \quad \text{d'après le rappel}$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{\cancel{1} - \cancel{1} - \theta^2 + 2\theta} = \frac{\cancel{\theta}(1-\theta)}{\cancel{\theta}(2-\theta)} = \boxed{\frac{1-\theta}{2-\theta} = P(X < Y)}$$

(36) On considère ici que A et B jouent en équipe, et $X+Y$ modélise le nb total de poissons pêchés par l'équipe A,B.

L'ensemble des valeurs prises par $X+Y$ est $\{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

Soit donc $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$. On a

$$X+Y=k \Leftrightarrow \text{il existe } i \geq 1 \text{ t.q. } X=i \text{ et } Y=k-i$$

$\hookrightarrow$ "0"
 $\hookrightarrow$ "0"

Donc $\{X+Y=k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{X=i, Y=k-i\}$. Comme la réunion est disjointe:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}(Y=k-i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \theta(1-\theta)^{i-1} \theta(1-\theta)^{k-i-1} = \theta^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^{i-1+k-i-1} \\ &= \theta^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-\theta)^{k-2} = \theta^2 (1-\theta)^{k-2} \sum_{i=1}^{k-1} 1 = (k-1) \theta^2 (1-\theta)^{k-2} \end{aligned}$$

Rappel Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour X une variable aléatoire, on a $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Exercice 5

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{a^2} \quad \text{par BT}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(X_i)}_{=\theta, \text{ car } X_i \sim \mathcal{B}(\theta)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \frac{n\theta}{n} = \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Var}(\bar{X}_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\text{Var}(X_i)}_{=\theta(1-\theta), \text{ car } X_i \sim \mathcal{B}(\theta)} \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \theta(1-\theta) = \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \end{aligned}$$

Rappel $\alpha \in \mathbb{R}$, z v.a.

$$\bullet \quad \text{Var}(\alpha z) = \alpha^2 \text{Var}(z)$$

$\bullet$ si z' indép. de z ;

$$\text{Var}(z + z') = \text{Var}(z) + \text{Var}(z')$$

Posons $f(\theta) = \theta(1-\theta)$, $\theta \in]0,1[$

$$f'(\theta) = 1 - 2\theta$$

$$\text{Donc } f'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{2}$$

	θ	$\frac{1}{2}$	1
f'		$+$	$-$
f		$\nearrow \frac{1}{4} \searrow$	

Par suite, $f(\theta) = \theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4} \quad \forall \theta \in]0,1[$

$$\text{Ainsi, } \text{var}(\bar{X}_n) = \frac{\theta(1-\theta)}{n} \leq \frac{1}{4n} \quad \text{Par suite,}$$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \theta| \geq a) = \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq a) \leq \frac{\text{var}(\bar{X}_n)}{a^2} \leq \frac{1}{4na^2}$$

$$\mathbb{P}(\theta \in]\bar{x}_n - a, \bar{x}_n + a[) = \mathbb{P}(\bar{x}_n - a < \theta < \bar{x}_n + a) = \mathbb{P}(-a < \theta - \bar{x}_n < a)$$

$$= \mathbb{P}(|\theta - \bar{x}_n| < a)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|\bar{x}_n - \theta| \geq a)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{4na^2}$$

Rappel $z \in \mathbb{R}, a > 0$

$$-a < z < a$$

$$\Leftrightarrow |z| < a$$

$$\textcircled{2} \quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le lancer } i \text{ donne pile} \\ 0 & \text{" " " face} \end{cases}$$

$$n = 10000$$

Donc

On connaît une réalisation de la v.a. $\bar{X}_{10000}$, qui est 0,2

Choisissons a pour que

$$1 - \frac{1}{4 \times 10000 a^2} = 0,9 \Leftrightarrow 0,1 = \frac{1}{40000 a^2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4000}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a \approx 0,016}$$

Donc $P(\theta \in]\bar{X}_n - 0,016, \bar{X}_n + 0,016[) \geq 0,9$.

Ici, θ représente la proba. que la pièce tombe sur pile. Pour la réalisation de $\bar{X}_n$ qui vaut $0,2$, on a donc

$$\theta \in]0,2 - 0,016; 0,2 + 0,016[, \text{ avec une confiance } \geq 90\%$$