Benoit Cadre

benoit.cadre@univ-rennes2.fr

1 CM toutes les 2 semaines, 1 TD toutes les 2 semaines

MCC : 1 examen terminal

STATISTIQUE INFERENTIELLE - INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : RAPPELS DE PROBABILITES DISCRETES

1 - Variable aléatoire discrète

Considérons l'expérience : On lance une pièce et on note le résultat, soit pile soit face. C'est une expérience aléatoire, car on ne peut pas prédire son issue.

Pour modéliser cette exp., on introduit la fonction

$$X : \Omega \to \{0,1\} \text{ avec } \begin{cases} 1 = \text{codage de pile} \\ 0 = \text{codage de face} \end{cases}$$

avec Ω, appelé univers, qui représente l'ensemble des conditions expérimentales. Noter que Ω est inconnue, au sens où on ne peut pas le décrire de manière exhaustive.

Définition Une variable aléatoire discrète est une fonction $X : \Omega \to D$, où D est un ensemble discret ($D = \mathbb{Z}^d$, $D = \mathbb{N}^d$, $D = \{0,1\}$ etc).

Une réalisation de la variable aléatoire discrète (v.a.d.) à valeurs dans D est un $X(\omega)$, pour un $\omega \in \Omega$.

Définition Soit X une vad à valeurs dans D. La loi de X est caractérisée par la connaissance des $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in D$.

Ici, $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, et le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ s'appelle espace probabilisé. On rappelle que $\mathbb{P}$ est une proba. sur Ω si :

① $\forall A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$ ② $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

③ $\forall (A_n)_n$ suite disjointe, $A_n \subset \Omega\ \forall n$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$

Revenons-en au lancer de pièce, modélisé par la vad $X : \Omega \to \{0,1\}$

Si p est la probabilité que la pièce tombe sur pile, alors la loi de X est décrite par $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$

2- Lois discrètes usuelles

Pour indiquer qu'une vad suit la loi $\mathcal{L}$, on note $X \sim \mathcal{L}$.

① Loi uniforme sur $A \subset \mathbb{Z}^d$ fini, notée $\mathcal{U}(A)$. On a $X \sim \mathcal{U}(A)$ si

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{\mathrm{card}(A)}, \quad \forall x \in A$$

Par exemple, le lancer d'une pièce équilibrée

② Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(p)$. On a $X \sim \mathcal{B}(p)$ si

$$\mathbb{P}(X=1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Par exemple, le lancer d'une pièce éventuellement non équilibrée.

(3) Loi binomiale de paramètres (n,p) avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$

On a $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ si

$$\mathbb{P}(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \forall x \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Par ex, n lancers d'une pièce telle que proba pile $= p$. Alors X modélise le nombre de pile obtenus au cours de ces n lancers.

(4) Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$. On a $X \sim \mathcal{G}(p)$ si $\mathbb{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1} \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$.

Dans le cadre de la répétition d'expériences de Bernoulli, cette loi modélise le rang du 1^{er} succès.

(5) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$. On a $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si $\mathbb{P}(X=x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$.

Cette loi modélise les évènements rares, cf chapitre 2

3 - Espérance

Pour X une vad à valeurs dans D, la moyenne ou espérance notée $\mathbb{E}(X)$ est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in D} x \, \mathbb{P}(X = x)$$

sous réserve de converge absolue de la série (implicite dorénavant)

<u>Théorème de transfert</u> Soit X une vad à valeurs dans D et $g : D \to \mathbb{R}$. Alors, l'espérance de la vad $g(X) = g \circ X$ vaut

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in D} g(x) \, \mathbb{P}(X = x)$$

<u>Propriétés</u>

1. Si X_1 et X_2 sont des vad t.q. $X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$, alors

$$\mathbb{E}(X_1) \leq \mathbb{E}(X_2)$$

(2) Si X_1 et X_2 sont des vad et $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_0 + a_1 \mathbb{E}(X_1) + a_2 \mathbb{E}(X_2)$$

(3) Si X est une vad, $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$

La variance est un outil qui mesure la dispersion des réalisations de la vad autour de sa moyenne. Elle est définie par

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

En pratique, pour calculer $\mathrm{var}(X)$, on utilise la formule de Koenig :

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

On note la formule de translation-homothétie :

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{var}(X)$$

Loi	MOYENNE	VARIANCE
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$
$\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

4. Indépendance.

Les vad $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans D sont indépendantes si, pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$ et tout $x_i \in D$, $i \in I$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Notez que si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $\forall g_i : D \to \mathbb{R}$ on a $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ indépendantes.

De +, si $\boxed{X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes}}$, alors :

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\dots\mathbb{E}(X_n)$$

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i)$$

5- Quelques résultats incontournables

<u>Théorème</u> Soient X une vad et $a > 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a} \quad \text{(Inégalité de Markov)}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{a^2} \quad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev)}$$

Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X_1, X_2 des vad, alors $\mathbb{E}(X_1 X_2)^2 \leq \mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}(X_2^2)$

Théorème (Loi des grands nombres) Soient $X_1, X_2, \dots$ des vad indépendantes et de même loi. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X_1) \right| \right) = 0$$

Interprétation : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \approx \mathbb{E}(X_1)$ si n gd.