FEUILLE TD1

Exercice 2

(1) On note ε_i le résultat du i-ème lancer : $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si "1" obtenu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alors, $X = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. On peut dire que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont indépendantes et de même loi, telle que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{6} \text{ et } \mathbb{P}(\varepsilon_i = 0) = \frac{5}{6} \; : \; \varepsilon_i \sim \mathcal{B}(1/6)$$

Dans ce cadre, on sait que $\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)}$ i.e.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-k} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

② <u>Rappels</u> Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des var :

- $\mathbb{E}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) = \mathbb{E}(\varepsilon_1) + \dots + \mathbb{E}(\varepsilon_n)$
- Si $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont <u>indépendantes</u> : $var(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) = var(\varepsilon_1) + \dots + var(\varepsilon_n)$.

Ici, $X = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\varepsilon_1) \text{ car } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ de même loi}$$

$$= n\,\mathbb{E}(\varepsilon_1)$$

Or $\varepsilon_1 \sim \mathcal{B}(1/6)$ donc $\mathbb{E}(\varepsilon_1) = 0 \times \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 0) + 1 \times \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \frac{1}{6}$ et ainsi

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = n\,\mathbb{E}(\varepsilon_1) = \frac{n}{6}}$$

De plus, comme $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ indépendantes :

$$var(X) = var\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} var(\varepsilon_1) \text{ car } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \text{ de même loi}$$

Donc $var(X) = n\, var(\mathcal{E}_1)$, or, $var(\mathcal{E}_1) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_1^2) - \mathbb{E}(\mathcal{E}_1)^2$ et $\mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_1$

car $\mathcal{E}_1$ ne prend pour valeurs que 0 et 1, d'où $\mathbb{E}(\mathcal{E}_1^2) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_1)$ et

$$var(\mathcal{E}_1) = \mathbb{E}(\mathcal{E}_1) - \mathbb{E}(\mathcal{E}_1)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6-1}{36} = \frac{5}{36}$$

et $\boxed{var(X) = n\frac{5}{36}}$

③ Y = v.a. qui compte le nb de "1" obtenus au cours de n lancers d'un autre dé équilibré

Alors $X+Y$ compte le nb de "1" obtenus lors de n lancers des 2 dés.

Dans ce cadre, $\boxed{X+Y \sim \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{6}\right)}$

Exercice 3

① X prend des valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc trouver la loi de X, c'est trouver $\mathbb{P}(X=k)$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$:

$\mathbb{P}(X=k)$ = proba de pêcher des poissons non rouges lors des $(k-1)$ premières prises, et la k-ième prise est un poisson rouge

$$= \underbrace{(1-\theta)\cdots(1-\theta)}_{k-1 \text{ fois}}\,\theta = (1-\theta)^{k-1}\theta$$

Donc $\boxed{X\sim \mathcal{G}(\theta)}$

(2) On a $E(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k\geq 1} k(1-\theta)^{k-1}\theta = \theta\sum_{k\geq 1} k(1-\theta)^{k-1}$

ens. des valeurs prises par X

<u>Rappel</u> si $|x|<1$, $\sum_{k\geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. En dérivant par rapport à x,

on trouve : $\sum_{k\geq \cancel{0}\,1} k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Alors, en posant $x = 1-\theta$:

$$\mathbb{E}(X) = \theta \sum_{k\geq 1} k(1-\theta)^{k-1} = \theta \frac{1}{(1-(1-\theta))^2} = \frac{\theta}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

De plus, $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Or,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k^2 \mathbb{P}(X=k)$$ par le théo. de transfert

$$= \sum_{k\geq 1} k^2 \theta (1-\theta)^{k-1}$$

On sait que $\forall |x|<1$: $\sum_{k\geq 1} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. En dérivant, on trouve :

$$\sum_{k\geq \cancel{1}2} k(k-1)\, x^{k-2} = -\frac{-2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad \forall |x|<1.$$

Or, $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k\geq 1} k(k-1)\mathbb{P}(X=k)$ par le théo. de transfert

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k\geq \cancel{1}\, 2} k(k-1)\,\theta(1-\theta)^{k-1} = \theta(1-\theta) \underbrace{\sum_{k\geq 2} k(k-1)(1-\theta)^{k-2}}_{= \frac{1}{(1-(1-\theta))^3} = \frac{2}{\theta^3}}$$

$$= \theta(1-\theta)\,\frac{2}{\theta^3} = 2\,\frac{1-\theta}{\theta^2}$$

Alors, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\big(X(X-1)+X\big) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 2\,\frac{1-\theta}{\theta^2} + \frac{1}{\theta}$

$$= \frac{2(1-\theta)+\theta}{\theta^2} = \frac{2-\theta}{\theta^2}$$

Finalement, $\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-\theta}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1-\theta}{\theta^2}}$

3 a Deux pêcheurs en compétition, notés A et B.

X modélise le nb total de poissons pêchés par A

Y " " B

Le gagnant est celui qui pêche le moins de poissons avant de pêcher un poisson rouge. Alors, $\mathbb{P}(X<Y)$ est la proba. que A gagne.

"$\cup$"

$X<Y \iff$ il existe $(k,\ell) \in \mathbb{N}^*$, $k<\ell$,

t.q. $X=k$ et $Y=\ell$

"$\cap$"

$\iff \bigcup_{1\leq k<\ell} (\{X=k\} \cap \{Y=\ell\})$

réunion disjointe

Donc $\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq k<\ell} (\{X=k\} \cap \{Y=\ell\}) \right)$

$= \sum_{1\leq k<\ell} \mathbb{P}(\{X=k\} \cap \{Y=\ell\})$ car la réunion est disjointe.

$= \sum_{1\leq k<\ell} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)$ car X et Y sont indépendantes.

$= \sum_{1\leq k<\ell} \theta(1-\theta)^{k-1} \theta(1-\theta)^{\ell-1}$

$$= \theta^2 \sum_{k\geq 1} \sum_{\ell \geq k+1} (1-\theta)^{k-1}(1-\theta)^{\ell-1} = \theta^2 \sum_{k\geq 1}(1-\theta)^{k-1} \underbrace{\sum_{\ell\geq k+1}(1-\theta)^{\ell-1}}_{\sum_{i\geq k}(1-\theta)^i \ (\text{Chgt } i=\ell-1)}$$

$$= \theta^2 \sum_{k\geq 1}(1-\theta)^{k-1} \sum_{i\geq k}(1-\theta)^i$$

Rappel si $|x|<1$:

$$\sum_{i\geq k} x^i = \frac{x^k}{1-x}$$

$$= \theta^2 \sum_{k\geq 1}(1-\theta)^{k-1} \frac{(1-\theta)^k}{1-(1-\theta)}$$

$$= \theta \sum_{k\geq 1}(1-\theta)^{2k-1} = \frac{\theta}{1-\theta} \sum_{k\geq 1} \left((1-\theta)^2\right)^k = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{(1-\theta)^2}{1-(1-\theta)^2}$$

$$= \frac{\theta(1-\theta)}{\cancel{1}-\cancel{1}-\theta^2+2\theta} = \frac{\cancel{\theta}(1-\theta)}{\cancel{\theta}(2-\theta)} = \frac{1-\theta}{2-\theta}$$

(3b) X = nb de poissons pêchés par l'individu A jq'à ce qu'un poisson rouge ait été pêché

Y = " " B "

"

On suppose que A et B agissent indépendamment l'un de l'autre $\Rightarrow$ X et Y indépendantes.

Alors $X+Y$ modélise le nb total de poissons ainsi pêchés.

Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $X+Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\} = \{2,3,4,\dots\}$. Pour calculer la loi de $X+Y$, il suffit donc de déterminer $\mathbb{P}(X+Y=k)$, $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

et $\Leftrightarrow \cap$

ou $\Leftrightarrow \cup$

$$\mathbb{P}(X+Y=2) = \mathbb{P}(X=1 \text{ et } Y=1) = \mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Y=1\})$$

$= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)$ car X et Y sont indépendantes

$= \theta \times \theta$ car $X \sim Y \sim \mathcal{G}(\theta)$

$= \theta^2$

Pour $k \geq 2$:

$$X+Y=k \iff \underbrace{\exists i=1,\dots,k-1}_{\bigcup_{i=1}^{k-1}} \text{ t.q. } X=i \underbrace{\text{ et }}_{\cap} Y=k-i$$

Donc $\{X+Y=k\} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \left(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}\right)$

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \left(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}) \quad \text{car la réunion est disjointe}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \theta(1-\theta)^{i-1}\, \theta(1-\theta)^{k-i-1} = \sum_{i=1}^{k-1} \theta^2(1-\theta)^{k-2} = (k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}$$

D'où la loi de $X+Y$.

Rappel

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\ell$$

$$\bigcap_{i=1}^{\ell} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\ell$$

Rappel

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_i)$$

si les A_i sont disjoints

Exercice 5

① On a par BT :

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq a\right) \leq \frac{var(\bar{X}_n)}{a^2}, \quad \forall a>0$$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta, \text{ car } X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$$

$$= \frac{n\theta}{n} = \theta$$

$$var(\bar{X}_n) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i) \text{ car } X_1,\dots,X_n \text{ sont indépendantes}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\theta(1-\theta) \text{ car } X_i \sim \mathcal{B}(\theta)$$

$$= \frac{n\theta(1-\theta)}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

Rappel Inégalité de Bienaymé - Tchebytchev

Soit Z une v.a.d. et $a>0$:

$$\mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq a\right) \leq \frac{var(Z)}{a^2}$$

Rappel $Z, Z_1, \dots, Z_n$ v.a.d.

- $\mathbb{E}(aZ) = a\mathbb{E}(Z)$ si $a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Z_i)$

Rappel $Z, Z_1, \dots, Z_n$ vad

- $var(aZ) = a^2 var(Z)$ si $a \in \mathbb{R}$
- $var\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{n} var(Z_i)$ si $Z_1, \dots, Z_n$ indépendantes

On a donc, $\forall a>0$:

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n-\theta|\geq a\right)\leq \frac{\theta(1-\theta)}{na^2}$$

Si $f(\theta)=\theta(1-\theta)$, $\theta\in[0,1]$, on cherche le maximum de f.

On a $f'(\theta)=1-2\theta$. Or $f'(\theta)\geq 0 \iff 1-2\theta\geq 0 \iff \theta\leq\frac{1}{2}$, ce qui donne le tableau de variation :

	0		$1/2$		1
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(\frac{1}{2})$	$\searrow$	

Donc $f(\theta)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(1-\theta)\leq\frac{1}{4} \quad \forall\theta\in[0,1]}$$

Par suite, $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n-\theta|\geq a\right)\leq \dfrac{\theta(1-\theta)}{na^2}\leq\dfrac{1}{4na^2}$

$$\iff 1-\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n-\theta|< a\right)\leq\frac{1}{4na^2}$$, car $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\bar{A})$

D'où $\mathbb{P}(|\bar{X}_n-\theta|<a) \geq 1-\frac{1}{4na^2}$

$$\iff \boxed{\mathbb{P}\left(\theta \in \left]\bar{X}_n-a, \bar{X}_n+a\right[\right) \geq 1-\frac{1}{4na^2}}$$

$|x-\theta|<a$

$\iff -a<x-\theta<a$

$\iff \theta<x+a$ et $\theta>x-a$

$\iff \theta \in]x-a, x+a[$

② On modélise la situation :

$\forall i=1,\dots,10\,000$: X_i = modélisation du résultat du i-ème lancé

$$= \begin{cases} 1 & \text{si le résultat est Pile} \\ 0 & \text{'' Face} \end{cases}$$

La loi de $X_i \sim \mathcal{B}(\theta^*)$. Ici θ^* = proba (inconnue) que la pièce tombe sur pile

De plus, les vad $X_1, \dots, X_{10000}$ sont indépendantes

On sait de plus que, pour un $\omega \in \Omega$, on a $\bar{X}_{10000}(\omega) = 0{,}2$.

Par ①, on sait que $\mathbb{P}\left(\theta^* \in \left]\bar{X}_n - a, \bar{X}_n + a\right[\right) \geq 1 - \dfrac{1}{4 \times 10000 \times a^2}$

On cherche $a > 0$ t.q. $1 - \dfrac{1}{40000\, a^2} = 0,95 \iff \dfrac{1}{40000 a^2} = 0,05$

$\iff a^2 = \dfrac{1}{40000 \times 0,05} = \dfrac{1}{2000}$, d'où $a = \dfrac{1}{\sqrt{2000}}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\theta^* \in \left]\bar{X}_n - \frac{1}{\sqrt{2000}}, \bar{X}_n + \frac{1}{\sqrt{2000}}\right[\right) \geq 0,95$$

Or, ici, $\bar{X}_n(\omega) = 0,2$ d'où, avec un niveau de confiance $\geq 95\%$, on a

$$\theta^* \in \left]0,2 - \frac{1}{\sqrt{2000}}, 0,2 + \frac{1}{\sqrt{2000}}\right[\approx \left]0,18 ; 0,22\right[$$